ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA
E INFERENCIA ESTADÍSTICA APLICADA A LA

CIENCIA POLÍTICA

Tomo I

Dr. Rafael Tórrez Valdivia

El sentido de lo vital, la moral y la ciencia son los tres ejes coordinados (no necesariamente bajo una forma ortonormal) que conforman la base del espacio euclídeo, en el cual los hombres proyectan su pensamiento. El primero es puro instinto, el segundo es determinado por la subjetividad histórica de cada sociedad y el tercero es el único objetivo, debido a que ***toda proposición científica respecto a un objeto real (físico o social) se construye en el subespacio generado por la Estadística y la Lógica:*** *aquélla dota de los instrumentos fundamentales a la observación, por la constatación empírica y el pronóstico, que discurren en consecuencia de la leyes de generalización positiva; ésta, permite la construcción de juicios complejos a partir de proposiciones simples, posibilitando además que los juicios complejos se hagan evidentes ante la limitada comprensión humana.*

Edda Valdivia de Martínez (1926-1995) en su ***"Teoría de la comprensión humana"****, excluida de la menos que mediocre antología de la filosofía boliviana, por su condición de mujer.*

Instituto de Investigaciones en Ciencia Política

Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística aplicada a la Ciencia Política

Tomo I

Dr. Rafael Tórrez Valdivia

Título:

Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística aplicada a la Ciencia Política.

Texto guía de la materia de Estadística Descriptiva e inferencial aprobado por la Comisión Académica de la Carrera de Ciencias Políticas de la UMSA.

Tomo I

Primera Edición

Autor:

Dr. Rafael Tórrez Valdivia

Depósito Legal:

4-1-1793-12

Impresión:

EDITORIAL Quatro Hnos.
MÁS TECNOLOGÍA MEJORES RESULTADOS

Índice

Prólogo

El fundador de la era positiva ha degradado la importancia de la religión y de la filosofía, dando supremacía a la experimentación. El referido, Galileo Galilei, afirmó hace medio milenio que "La matemática es el lenguaje de la ciencia", en virtud a que hace consistente la multiplicidad de los resultados de la observación, además de que representa la aplicación más directa de la forma lógica en la que piensan los hombres que se dedican a teorizar. Unas centurias después, bajo ese impulso intelectual, Augusto Comte fundó las Ciencias Sociales, de la que la Ciencia Política (en su concepción antonomástica, moderna) es un subcampo.

Bajo el principio reseñado, en un tiempo y un lugar en que predominan las interpretaciones "analíticas", "críticas", "telúricas", "místicas" y en general, con excepción de las primeras (que lindan en la metafísica) poco precisas de la realidad política boliviana; a riesgo de que pudiera parecer antihistórico, la Carrera de Ciencia Política y Gestión Pública de la Universidad Mayor de San Andrés, encomendó al polémico y polifacético doctor Rafael Torrez Valdivia, cuyas aptitudes transitan desde la composición de himnos a la creación de teorías generales, la realización de un texto que introduzca a los estudiantes de manera sencilla, pero con el suficiente rigor, en un elemento esencial de la Ciencia Política Positiva, la Estadística Aplicada; el cual representa en su estructura gnoseológica, el compás mediante el cual, la ciencia que estudia la sociedad a través de sus determinaciones políticas, traza sus funciones de descripción, contrastación empírica e inferencia. En este tiempo no puede llamarse científico, a lo más "analista" o "comentador político", a quien ignore la significación de un "Coeficiente de Correlación" o la "Densidad de Probabilidad Normal".

Sin embargo, el texto no tiene el contenido ni la forma de exposición formularia de los habituales textos "Ingenieriles" de Estadística Aplicada, en los que se resigna la profunda comprensión del fenómeno, bajo el pretexto de la precisión de su medición. Los politólogos tampoco queremos correr la misma suerte de los economistas, que han menoscabado e incluso demeritado su ciencia merced al desmedido uso de modelos econométricos, logrados mediante la aplicación de programas informáticos. Es bastante ingenuo y devela superficialidad en el conocimiento de la teoría propia de una ciencia , el intentar sustituir sus "tesis estructurales" que se generan a partir de una profunda comprensión de un fenómeno, por "formulaciones matemáticas reducidas", generadas sin previo fundamento (generalmente relaciones lineales, entre variables dependientes e independientes) cuya congruencia matemática no ha merecido sustentación (ex ante) y cuya fundamentación ilegitima es posterior (ex post) basada únicamente en los niveles de determinados parámetros estadísticos.

Por eso el autor sujeto a nuestras pretensiones no se ha desarraigado del cause íntimo de la Ciencia Política, por el cual transcurre la sabiduría que explica los hechos políticos, erudición incardinada en categorías particulares generadas por los científicos políticos. Ha preferido no navegar en el sólido albeo de la Estadística General, por lo que la obra deberá considerarse también, más forjada en el facetado y culto troquel de la Ciencia Política, que en la inexorable pero hierática prensa de la Estadística Matemática.

El libro está dividido en dos tomos debido a la complejidad y la extensión de la materia, la referencia sumaria que se hace en lo que continúa, describe de forma somera el contenido del primero.

En su primer capítulo, en virtud a que en abstracto, en la Ciencia Positiva, el hecho político debe ser interpretado como un fenómeno, cuya expresión es una tesis positiva, el autor —luego de discurrir respecto a las principales formas generales de comprensión de la ciencia política analítica, positiva y crítica— define este elemento epistemológico esencial de forma estricta, "La Tesis Positiva", entendida como un enunciado cuya validez no se sustenta en la fundamentación teorética, argumentativa o lógica, sino en la realidad del hecho, su facticidad. Además en este capítulo, se detalla el significado de varias categorías derivadas como: Correspondencia Causal, Dependencia Causal, Jerarquía Causal, Monotonía Causal, Tesis Elemental, Tesis Estructural, etc.

En el segundo capítulo, el autor hace un esbozo del desarrollo histórico de la Estadística Aplicada, y concluye, expresando las principales definiciones que le son inherentes, merced a las cuales se ubica, como un objeto epistémico específico.

En el tercer capítulo, se expresan las definiciones de los términos: "Variable", "Dato", "Base de Datos", "Distribución de Frecuencias", y todas las operaciones que le son inherentes. Se enseña además, el modo mediante el cual, una variable originalmente cualitativa puede ser transformada, para efectos de su operativización (operacionalización), en una variable cuantitativa.

En el cuarto capítulo, se define de forma general un estadígrafo, diferenciando el significado de la población objetivo, como sustrato al cual se dirige la investigación de la muestra, como instrumento para su conocimiento; se hace énfasis en el sentido relativo de la verdad positiva (sujeta a una distribución de probabilidad). En referencia a la aplicación política, se desarrolla la importante categoría de "Espectro Político", entendido como una variable política (cualitativa) transformada en una cuantitativa operativa, en función de categorías estrictamente políticas que intentan la comprensión estricta (Circunscrita con exactitud a la teoría de la Estadística y a la Teoría de la Ciencia Política Positiva) de un "Sistema Electoral", en consideración de que el sustrato de electores que emite su voto representa la muestra que elije a los mandatarios preeminentes de un Orden Político Democrático.

En el quinto capítulo, se desarrollan los Estadígrafos de Tendencia Central, entendidos como los representantes de una multitud de datos. Permite este capítulo, con las suficientes simplificaciones pedagógicas, un acercamiento a las complejas categorías de "Campo Político", "Vector Político (Fuerza Política)", "Resultante Política", "Equilibrio Ideológico", etcétera, que no podrían

ser avizoradas de otro modo, demostrándose de esta manera la profunda imbricación de la matemática con la ciencia política no especulativa (positiva).

En el sexto capítulo, que versa respecto a los Estadígrafos de Dispersión, Sesgo y Curtosis, se aplican estos conocimientos en la interpretación de la "Sistematicidad Política", como una categoría fundamental de la ciencia política, construida a partir de la comprensión de la "dispersión política". Además en referencia al Sesgo y la Curtosis, se discute respecto a la estabilidad del equilibrio político y la coherencia estructural de un sistema político, en referencia a un "tipo ideal" (un Orden Democrático Teórico) en el cual se presupone una dispersión adecuada de las fuerzas políticas y un equilibrio de recursos, que en el futuro aseguran su reproducción.

En el capítulo séptimo, se exponen los fundamentos de la importante teoría de la probabilidad, cuya incorporación en la comprensión de los fenómenos representa el último salto epistemológico de trascendencia, diferenciándose los hechos determinísticos de los aleatorios y, escindiendo los últimos en hechos de incertidumbre y en hechos de riesgo, siendo estos últimos, en sentido estricto, los únicos que estudian las ciencias sociales.

En el capítulo octavo, se perora con precisión, respecto a la "Variable Aleatoria", su estructura, sus clases, definiéndose las funciones de cuantía de probabilidad, para las variables aleatorias discretas y las funciones de densidad de probabilidad, para las variables aleatorias continuas. Se indican además aplicaciones particulares en la ciencia política.

En el capítulo noveno, se desarrollan los principales modelos matemáticos, que permiten de un modo expedito y fácil, la aplicación de la teoría de la probabilidad en la solución de problemas en los que interviene el azar.

El capítulo décimo, es optativo en su lectura, en cuanto desarrolla de un modo elevado, fuera del alcance matemático que permite el bachillerato, los anteriores capítulos, en su significación teórica y su aplicación práctica.

El texto además está acompañado de varios apéndices, que facilitan la comprensión de los temas más complejos de su cuerpo principal.

Los roles supremos de toda ciencia positiva consisten, en generar, una estructura, teórica que posibilite la comprensión en abstracto de la multiplicidad de observaciones o el verificar una teoría general en consecuencia de ellas. Ninguna de las funciones nombradas puede ser cumplimentada sin el conocimiento de los métodos estadísticos, por lo que resulta una ingenuidad, sino una estupidez el negar que su conocimiento es esencial en la formación de un científico, en cuanto no existe ciencia sin observación metódica.

Lic. Johnny Villarroel Tordoya
Director de la Carrera de Ciencia Política y Gestión Pública
UMSA

Proemio

En la corta vida de la carrera de Ciencia Política y Gestión Pública, 29 años de existencia, se identifican con claridad tres épocas, la primera signada en la Ciencia Crítica (orientada hacia el Materialismo Histórico) bajo la dirección intelectual de Jorge Echazú Alvarado, la segunda en la ¡Ciencia Positiva sin base Matemática!, dirigida por Julio Ballivián Ríos y la Tercera, inaugurada recientemente, en el Pragmatismo Positivista, con base estadística y matemática, bajo la dirección de Johnny Villarroel Tordoya.

En realidad, la segunda época representa una fase de transición, en cuanto es un absurdo el concebir la posibilidad de una ciencia positiva, no instrumentada en la ciencia que enseña la recolección organización e inferencia sobre una base fáctica, los datos, (La Ciencia de la Estadística) y aún reverberan sus defectos en los denominados "analistas políticos", quienes opinan sin fundamento científico, apoyados en la intuición, aunque tienen muchos "hinchas", para quienes los desafíos de la solemnidad representan una barrera infranqueable, como lo reconoce el principal epígono del pensamiento neoliberal Napoleón Pacheco que independientemente de su ideología, ufana un adecuado conocimiento técnico. Desde otra perspectiva, la Juventud Socialista, dirigida por el notable docente de la facultad de sociales Jaime Vilela, perora que los denominados Analistas Políticos, han prostituido la opinión pública, en cuanto han reducido a lo trivial, los complicados fenómenos sociales que se suscitan en el seno de nuestro Estado. Sea como fuere, para bien o para mal, la carrera de Ciencia Política y Gestión Pública de la UMSA, a la que siguen como infantes las otras carreras de Bolivia, ha dado rumbo intelectual a la Ciencia Política en Bolivia e incluso a generaciones de periodistas, que hasta para el comentario de lo más banal, recurren a un politólogo.

En esa circunstancia, con buen tino, enfrentando en un congreso la tonta proposición de que pueden existir científicos sociales, que no conozcan estadística, así como filósofos que no conozcan las reglas de la inferencia lógica, Villarroel ha promovido la incorporación al presupuesto de las materias de la carrera la asignatura de Estadística Descriptiva e Inferencial, que los opúsculos que prosiguen, intentan pergeñar en sus características principales.

Al ser una edición especial, del texto que será publicado este año, el autor encarecidamente, y con toda humildad aceptará cualquier crítica fundamentada, para poder incorporar nuevos temas, corregir los existentes o suprimir los que no fueran necesarios.

Capítulo Primero

FUNDAMENTACIÓN DE LA RELACIÓN DE LA ESTADÍSTICA APLICADA CON LA CIENCIA POLÍTICA POSITIVA

INTRODUCCIÓN

TAXONOMÍA DE LAS CIENCIAS Y UBICACIÓN EPISTEMOLÓGICA DE LA CIENCIA POLÍTICA POSITIVA[1]

Aunque en su aplicación real, en atención al beneficio pedagógico que otorgan los modos epistémicos eclécticos[2], difícilmente se presentan de forma pura; existen, al menos en teoría, de acuerdo al desarrollo de la epistemología contemporánea, tres Órdenes Científicos[3].

Clasificación de las Ciencias de Acuerdo a la Naturaleza de su Método General:

- **El Analítico Deductivo (Científico Racionalista)[4]**.- Cuyo método se concentra en las reglas de la Inferencia Lógica[5].

---

1 La taxonomía que se expone es propia del autor.

2 Los Modos Epistemológicos Eclécticos son los que no se circunscriben a la utilización de un único método, sino más bien utilizan de los varios existentes, lo que consideran mejor, en atención a lograr un determinado resultado, en la interpretación del célebre utilitarista Jeremias Bentham. La principal crítica de la circunscripción estricta a un método en una investigación científica, no circunscrita al escepticismo (doctrina que niega la posibilidad del conocimiento) ha sido producida en nuestro tiempo por Paul Feyerabend.

3 Entiéndase por "Orden" a una forma especial de conceptualizar la ciencia. La primera clasificación de las ciencias fue desarrollada por el sofista **Hipias de Elis**, que en el siglo V A.C. y a diferenció las "Leyes Naturales Absolutas", las denominó *"fysei"*, de las "Leyes Establecidas por la Convención de los Hombres Viviendo en Sociedad". A estas últimas las llamó *"Thesei"*; "Leyes de una Sociedad."

4 Denominado por Augusto Comte, con mucha impropiedad: "Metafísico".

5 Como ilustración: La ciencia más connotada bajo esta concepción es la "Geometría Euclidiana" explanada como una obra maestra de la humanidad por el griego Euclides en sus "Elementos" y recientemente

- **El Histórico Crítico ("Científico Dialéctico[6]".-** Que se orienta a la interpretación historiográfica[7] de los acontecimientos.
- **El Positivo (Científico Empírico)**.- Donde los resultados se construyen y son contrastados mediante la aplicación de los resultados de la Ciencia Estadística, en el uso común del lenguaje y en lo que prosigue del texto, cuando no amerite confusión, denominada simplemente "Estadística".

Si bien en la presentación real de cualquiera de las posibles manifestaciones de la ciencia la estadística es importante, las ciencias positivas no pueden existir independientemente de la estadística, en cuanto intentan cumplir tres funciones esenciales[8] que no son posibles de ser desarrolladas sin la utilización de sus metódicas, estas son:

Pretensiones de las Ciencias Positivas:

(a) Describir una realidad, (que en los términos del positivismo se denomina "Población Objetivo"), encontrando sus parámetros generales, de tendencia central, de dispersión, de sesgo y de curtosis y otros inherentes a una descripción peculiar denominados: indicadores, índices, patrones, etc.

(b) Explicar de manera significativa[9] una realidad positiva[10] mediante teorías verificables (a un determinado grado de confianza) con el uso de métodos estadísticos (que deben expresarse mediante relaciones fenoménicas - relaciones de causación). Estas son denominadas tesis positivas.

(c) Predecir un evento futuro, o pronosticar un evento desconocido, con un determinado grado de significación, sobre la base de comportamientos y datos conocidos.

División de la Estadística:

En atención a estas funciones, la estadística se escinde **funcionalmente** en **Estadística Descriptiva** que, como lo anuncia su nombre, intenta cumplir la función descriptiva en

posibilitando al estudio del derecho el grado de ciencia, se manifiesta en la "Teoría Pura del Derecho" generada por el más importante jurista de nuestros tiempos, Hans Kelsen.

6 El uso de este nombre es bastante sesgado hacia el Materialismo Histórico y por ello se lo ha puesto entre comillas.

7 Que sigue los lineamientos de algún método de interpretación histórica, cualquiera de los desarrollados a partir de Petrarca y Bocacio, hasta las concepciones del Materialismo Histórico o por Arnoldo Toynbbe.

8 Que en el mismo capítulo se estudia con mayor profundidad.

9 El término conjuntivo "Explicación Significativa", quiere decir que los argumentos sostenidos, se han desarrollado sobre la base de la posibilidad de que puedan ser eventualmente probados mediante una base material y ha sido difundido mediante la conocida obra de Popper: "La Lógica de la Investigación Científica".

10 Una Realidad Positiva es aquella que, al menos, existe en el tiempo. Si existe en el tiempo y en el espacio se denomina Realidad Tangible. La Psicología estudia Realidades Positivas no Tangibles.

las ciencias positivas y en la **Inferencia Estadística**, la que se orienta a la explicación y al pronóstico en una realidad positiva.

Las realidades positivas se dividen en:

Clasificación del Sustrato Positivo:

(a) Realidades Positivas Físico-Químicas.

(b) Realidades Positivas Antropogénicas[11].

(c) Realidades Positivas Psicológicas.

Clasificación del sustrato Físico-Químico:

Las realidades Físico Químicas.- Denominadas también "Realidades Naturales", se dividen en: Realidades Positivas Estrictamente Físicas[12] y Realidades Positivas de Ínter-Actuación Físico-Química (las dos últimas pueden ser Biológicas y no Biológicas).

Las Realidades Antropogénicas deben a su vez clasificarse en:

Clasificación del Sustrato Antropogénico:

- Realidades Positivas Sociales.- Son el objeto de la Sociología (y de cualquier ciencia que estudie) con un criterio específico el efecto de las relaciones interindividuales (o entre clases) que se producen en el seno de una sociedad.
- Realidades Positivas Antropológicas[13].- Estudian el origen físico y las manifestaciones culturales documentadas del Homo Sapiens.

Definición de la Ciencia Política bajo el Positivismo Científico:

La Ciencia Política (en un sentido positivo) **es una Ciencia Social, que tiene por objeto la acumulación sistemática de conocimientos y la generación de leyes del sustrato político[14]**. Sin embargo, en el siguiente punto, se abordan las distintas interpretaciones.

RESPECTO A LA NATURALEZA DE LA CIENCIA POLÍTICA Y DEL CIENTÍFICO POLÍTICO

Definición General del Término "Ciencia":

11 Que han sido generadas por la existencia o los hechos de los humanos.

12 Cuyo estudio se refiere al nivel infra atómico y que en el nivel supra atómico hace abstracción a la composición de los elementos que intervienen en los fenómenos físicos.

13 En su plenitud, el objeto de estudio de la Antropología Física y una gran parte de la Antropología Cultural, no así el objeto de estudio de la Antropología Filosófica.

14 El Comportamiento Político de las Instituciones Políticas Necesarias (como el Estado, los partidos políticos, los grupos de presión) y el comportamiento político de los hombres, considerados de forma individual.

Una ciencia es un conjunto de conocimientos, al menos eventualmente útiles, delimitados en método: objeto, intención y en lenguaje. Una ciencia es positiva (Estrictamente una Ciencia[15]) cuando su objeto de estudio es una realidad tangible[16] y su método está circunscrito a la aplicación de la estadística.

Origen de la Ciencia en General y de las Ciencia Política en Particular:

El estudio científico del comportamiento (de los hombres considerados como individuos) y de las instituciones políticas (en cuanto cumple con las notas preestablecidas), se inicia en Atenas, 440 A.C., año en que el Estagirita Aristóteles escribe La Política, dando inicio a la Ciencia Política Analítico Deductiva y cuya base axiomática se sostiene en Máximas de Carácter Moral. Así, en orden de su aparición, la Ciencia Política es la fundadora de las ciencias sociales.

Primer Viraje Epistemológico de la Ciencia Política:

Luego de una larga evolución de esta corriente, en el siglo XV se sustituyen los apotegmas morales por "principios pragmáticos"[17] dirigidos al control del Estado. Por lo que, a su epígono, Nicolas Maquiavelo autor de El Príncipe[18] se le considera "el padre" de la Ciencia Política Moderna. Sin embargo su discurso en el orden metodológico continúa con la tradición Analítico Deductiva que enseñó el gran maestro peripatético[19].

Definición Analítico Deductiva de la Ciencia Política:

Sobre esta fundación contextual, podemos definir la Ciencia Política Analítica Deductiva como: **"Un Conjunto de principios y teoremas dictados por la Razón[20] y suficientemente sistematizados que enseñan bajo formas directas o mediante teoremas, el modo de obtener y conservar el poder en un Estado".**

---

15 El positivismo niega de forma vehemente que pueda ser considerado como ciencia, el conocimiento no positivo de los fenómenos reales naturales o sociales sea bajo una interpretación crítica o analítica, admitiendo al mismo tiempo que el análisis esta reservado a la interpretación de objetos ideales como lo son los objetos matemáticos o geométricos.

16 Apreciable por los sentidos, de forma directa o mediante un instrumento.

17 "Apotegmas Políticos", deslindados de los correspondientes morales.

18 Otras de sus obras referidas a la política son: Discursos sobre la primera década de Tito Livio, el Arte de la Guerra, descripción de Alemania, descripción de Francia. El viraje epistemológico de Maquiavelo es menor en cuanto no implica la sustitución de un "patrón de comprensión" sino simplemente la sustitución de sus términos de referencia, en concreto la sustitución de la axiomática moral por "principios pragmáticos" circunscritos a la toma y conservación del poder en un Estado.

19 El aporte principal de Maquiavelo, más un literato humanista que un científico (como en nuestro medio ha sido Rene Zavaleta Mercado) a la Teoría de la Ciencia en general es la "Justificación a posteriori que ulteriormente alcanzará eco en la teoría del Derecho Económico y la Administración por Objetivos.

20 La "Razón" , infalible, irrebatible, trascendente eterna y universal que adquiere personería, por ello la hemos escrito con mayúscula.

Entonces puede identificarse metodológicamente la Ciencia Política, como una **Lógica Regional[21], gracias a la cual es posible la comprensión de un sustrato político[22]** o equivalentemente como: **El conjunto de Leyes Científicas de validez universal que permite la comprensión de las Instituciones Políticas.**

Segundo Viraje Epistemológico de la Ciencia Política:

En el giro epistemológico iniciado por Francisco Bacon de Verulam[23] y Galileo Galilei[24], que pregonan que todo conocimiento, auténticamente científico (de los fenómenos reales[25]), se funda en la experiencia (Empirismo Científico[26]) y que las matemáticas sea el único lenguaje con el cual se expresa la ciencia. La ciencia política tiende a hacerse positiva, y seguir el método émpírico inductivo, es decir basado en la observación de los hechos políticos en los cuales encuentra regularidades y diferencias estadísticas que permiten lograr conclusiones significativas[27].

Además, por el cause de la metódica Dialéctica desarrollada por Francisco Federico Hegel y aplicada por Karl Marx, en su historiografía denominada Materialismo Histórico[28], existe una Ciencia Política Crítica, que entiende que su objeto es el estudio de la evolución histórica de una sociedad, en atención a la interactuación de las "Fuerzas Productivas" y las "Relaciones Sociales de Producción". Base Económica que considera que el ámbito político es una superestructura[29]; cuya dirección y sentido

---

21 Lógica Aplicada a un ámbito de comprensión específico.

22 En el ámbito vulgar el término "Sustrato Político" es sustituido por la expresión vulgar, que por su uso corriente tiende a adquirir validación de término técnico: **"Lo Político"**.

23 Autor de El Novum Organom, obra en la que refuta el sistema metodológico de Aristóteles.

24 Autor de "**El Diálogo Sobre los Dos Sistemas Principales del Mundo"** (Discusión Sobre La Base de Observaciones Telescópicas del Heliocentrismo y el Geocentrismo) y El Mensajero Celestial en la que, sobre la base de registros astronómicos, prueba que Venus gira alrededor del sol.

25 Como todo fenómeno necesariamente es real, el pleonasmo en el paréntesis sirve para dar énfasis y de forma tácita indicar que la Ciencia (cuando exista esa posibilidad) de lo no real, por oposición, no puede ser positiva.

26 Que desarrolla su filosofía y su método general a partir de la exposición de John Locke, a finales del siglo XVII, cuando el citado autor en sus "**Ensayos Concernientes al Entendimiento Humano**" combate la posibilidad de la existencia de las ideas innatas. Además del citado, en el acendramiento del Empirismo Científico, se deberá tener presente el gran aporte de David Hume, mediante su **"Tratado de la Naturaleza Humana".**

27 En los Términos del Epistemólogo Neopositivista Karl Popper, "**con sentido científico",** como lo ha expuesto en " **La Lógica de la Investigación Científica.** Se considera que la descripción precisa de este método, fue desarrollada por primera vez por el Sociólogo Emilio Durckeim, en sus **"Reglas del Método Científico"**.

28 La Doctrina se denomina Economía Política.

29 Surge de las Relaciones Económicas de producción integrándose con ellas de forma dialéctica, es decir que se influyen mutuamente, predominando decididamente a lo largo de la historia la influencia de las relaciones económicas. Una digresión del Marxismo, epigonada por **Bernstein** del Materialismo Histórico, propone que en todos los casos la influencia parte del ámbito económico.

no son independientes de las determinaciones económicas[30]. En las Ciencias Críticas se da especial importancia al rol de la lucha de clases en el devenir histórico de una sociedad, bajo esta égida se puede definir la Ciencia Política en un sentido crítico, del modo más general, como:

Definición Critica de la Ciencia Política:

La comprensión actual y suficiente[31], de formas específicas de organización política, surgidas y consolidadas bajo reglas históricas de ineluctable cumplimiento.

Y, en un sentido tendencioso respecto al Materialismo Histórico[32]:

Definición Marxista de la Ciencia Política:

La interpretación histórica del Estado como institución política superestructural que posibilita la hegemonía de una clase social, en correspondencia del dominio que ejerce de los medios de producción.

Para el materialismo histórico, las instituciones políticas están condicionadas de modo determinante por las formas específicas en las cuales se manifiestan las Formaciones Sociales, concebidas en su esencia como realidades concretas, en las cuales se interrelacionan Modos de Producción distintos, dominados por uno en particular[33], del que la Formación Social toma su nombre.

En el presente texto, se estudiará la Ciencia Política como una "Ciencia Social", lo que equivale a afirmar como una ciencia positiva, y otra nota que la diferencia de la Ciencia Política Crítica es que, considera a la sociedad como el resultado de la reunión de individuos preexistentes a su formación. Como corolario de este punto, antes de ingresar al estudio de la estructura de una ciencia positiva se definirá una vez más (en otros términos y con mayor precisión) la Ciencia Política:

30 Una mejor comprensión de lo afirmado exige el conocimiento de la Teoría Económico Política.

31 Los adjetivos de "Actual" y suficiente, tienen una enorme importancia epistemológica, el primero representa la mutabilidad del conocimiento crítico y el segundo, su suficiente estabilidad, de modo que pueda ser comunicable.

32 Para el materialismo histórico, la propia "Economía Política" es la Ciencia Política, en cuanto es incomprensible en la comprensión de una Formación Social, la asunción de una realidad política, independiente de una realidad económica.

33 "La categoría Modo de Producción", significa en el Materialismo Histórico, la forma en la cual una sociedad produce y reproduce sus medios de subsistencia.

Definición Positiva de la Ciencia Política:

"Estudio sistematizado que siguiendo el método de las ciencias positivas, describe, explica y predice las relaciones de poder que se suscitan en el seno de la sociedad ora materializadas en sus instituciones políticas u ora en el comportamiento político de los individuos que la conforman".

ESTRUCTURA DE UNA CIENCIA POSITIVA

Definición de Sistema (Estructura):

"Una estructura es un conjunto de partes interrelacionadas entre sí para el cumplimiento de determinadas funciones, explicadas por finalidades últimas que ha su vez han surgido bajo las limitaciones de un medio". Toda ciencia positiva, necesariamente tiene en su estructura los siguientes componentes:

(a) **OBSERVACIÓN[34].- Consiste en la apreciación de un sustrato de estudio, reduciendo las características de sus elementos a un determinado número de atributos, los cuales a su vez son concebidos como una variable estadística.** Esta forma de observación es diferente a la común, ya que está sujeta a un método específico. Cuando la observación se la hace con un criterio científico, **se aprecia, luego que es circunscrita, mediante los sentidos o con un instrumento[35],** una Realidad Positiva a la que se le puede atribuir una infinitud de atributos objetivos[36].

El "Ente" al cual se dirige el interés científico (que se considera como una reunión natural o social de elementos pertenecientes a un género) se denomina Población Objetivo.

La observación es el acto privativamente humano mediante el cual el sujeto cognoscente aprecia sensitiva y racionalmente algo en lo que tiene interés[37]

(b) **TEORIZACIÓN.- La reducción de una multiplicidad de entidades concretas a un ser[38] abstracto que los representa, con adecuada precisión, constituye la teorización[39].**

34 Debiera denominarse con mejor propiedad en diferencia a la "mera apreciación" casi animal del mundo, Observación Metódica, u Observación Científica.

35 Como el Microscopio, Telescopio, Termómetro, Diapasón, etc.

36 Que tienen representación Erga omnes (para todos) y que por ello son comunicables.

37 La "Delimitación Previa" es una característica inmanente a todo acto de observación.

38 "Ser Epistemológico".

39 **Al construir la presente definición el autor a seguido a Kant, que de forma opuesta a Aristóteles afirma que el acto primario de la inteligencia es el juicio, que precede al concepto. En este sentido la teorización representa la construcción de un juicio relacional**

Definición de "Postulado Reducido" y "Postulado Estructural":

La teorización se plasma en la generación de Postulados Reducidos[40] —relaciones entre variables bajo algoritmos matemáticos comunes, generalmente Funciones Racionales[41]— a partir de complicadas Formas Estructurales[42], que expresan las maneras auténticas de relación entre las variables, causa y efecto.

Formas en las que se Produce la Reducción Estructural:

Es decir, en el paso de una Forma Estructural a una Forma Reducida, existe una "Reducción Relacional", que supone la asunción de una forma más simple como representación de una compleja, y otra, "Reducción Sustancial", que consiste en utilizar en la Forma Reducida, un menor número de variables, únicamente las más importantes.

La relación entre las variables que intervienen en los postulados reducidos, es una relación **puramente estadística** inferida a partir de una relación fenoménica, que es la misma naturaleza de unas Formas Estructurales. Por lo que en los Postulados Reducidos deben denominarse a las variables, dependientes o independientes, según representen al efecto o a la causa respectivamente; y, en los Postulados Etructurales variables causa o efecto.

Definición de "Modelo":

En sentido estricto, un Postulado Reducido representa una tesis derivada de la observación, **la simplificación mediante sus partes y relaciones más importantes de una Realidad Compleja**, **un "Modelo"**. Los Postulados específicos que se generan en la teorización, a su vez están regulados por las categorías concretas[43] de la ciencia, en particular en la que se desarrollan[44]. La teorización es el acto científico mediante el cual, a partir de un conjunto de observaciones preliminares[45], en aplicación estricta de la lógica coligativa se proponen leyes generales, susceptibles de ser verificadas.

general entre las causas y los efectos, en consecuencia de muchas observaciones particulares manifestadas en la realidad.

40 Son susceptibles de ser verificados empíricamente.

41 Funciones Algebraicas, Polinomios de la forma: $y=\sum_{r=0}^{r=k} A_r x^r$

42 Formas fenoménicas que se infieren a partir de la observación, sin embargo, presentan dificultad en ser corroboradas directamente.

43 El Marco Teórico de la Ciencia.

44 Se ha insistido a lo largo de la exposición que una de las notas esenciales de toda ciencia es la delimitación de su lenguaje.

45 El término preliminar, adquiere en el contexto bastante importancia en cuanto refiere que anteriormente no existía una teoría. Puede generalizarse sin embargo su uso para indicar que es previo a la nueva teoría que se intenta construir.

Definición de "Céteris Paribus":

La teorización, luego de analizar, interpretar y sintetizar el objeto real, que aparece como una **Forma Estructural**, lo reduce a un Objeto Científico, que es la proyección de un **Objeto Real**, al ámbito de la **"Abstracción Concreta"**[46], este procedimiento se denomina: **Subsunción.** Se asume en este acto intelectivo de conformación del objeto científico que los demás atributos del objeto real (no considerados en el **Objeto Científico**), permanecen constantes; **Céteris Páribus**, o se manifiestan en un factor aleatorio, cuya distribución de probabilidad es "suficientemente" conocida[47].

(a) **CONTRASTACIÓN EMPÍRICA.- Es la verificación con un determinado grado de certidumbre de lo que se afirma en los Postulados Reducidos además de su implicación, como una prueba, de las Formas Estructurales Generales.**

"Significación Estadística" y "Significación Causal":

Enunciada una Regularidad Positiva, si se verifica mediante la aplicación de los métodos estadísticos, como los de regresión o de correlación, que en un caso concreto ésta acontece, se habrá establecido con un determinado grado de confianza, una **Relación Estadística Significativa,** entre variables y será suficiente motivo para inferir que un enunciado positivo, que refiere una relación entre causas y efectos, representados por las variables entre las cuales se ha encontrado la indicada relación, tiene suficiente **Significación Causal**[48].

Regla de Generalización (Ley Positiva):

Así, si se constata, mediante la correlación entre un juego de variables independientes y dependientes, en una forma reducida, que cuando concurren un conjunto de causas, se suscita un efecto, con suficiente regularidad infiriéndose entonces la validez del postulado estructural de la que la forma reducida es una proyección; se puede erigir sobre la base de esa constatación una Ley Positiva, cuya validez, proveniente de los hechos es independiente de su relevancia teórica, posibilitándose una Regla de Generalización.

46 Que interpreta un ente delimitado, descubierto por la experiencia, mediante categorías generales coordinadas.

47 Cuando se conoce suficientemente la forma en la cual se presentan o influyen las causas no consideradas, se enfrenta un "Modelo de Riesgo" cuando no se conoce suficientemente su Distribución de Probabilidad, se tiene en frente un "Modelo de Incertidumbre".

48 "Significación Positiva".

PROPÓSITO DE LAS CIENCIAS POSITIVAS

Toda Ciencia Positiva, intenta tres propósitos consecuenciales[49] (que se componen en orden ascendente):

(a) **DESCRIPCIÓN.-** Es la fase inicial de toda ciencia, que se inicia por la delimitación factual, mediante un conjunto de categorías[50] previamente definidas de la realidad que se observa. La delimitación, en las ciencias positivas, tiene un **sentido objetivo**; temporal o espacial; y también en determinados casos, se circunscribe a un segmento del rango de una variable[51] que se denomina: **"Variable Delimitadora[52]"**.

Definición de Objeto Científico:

El sentido objetivo de la limitación se establece respecto a los elementos de la Población Objetivo. Estas son sus atributos relevantes, convirtiendo los objetos reales que se observan, en **"objetos científicos"; objetos reales descritos mediante un conjunto limitado y ordenado de características relevantes**. Este periodo inicial de la descripción se denomina **"Circunscripción Objetiva"**.

Definición de "Partición Relevante" y "Criterio Taxonómico":

Terminada la delimitación de la Población Objetivo, la descripción prosigue en la generación de una **Partición Relevante**; que es la clasificación de los elementos de la Población Objetivo en **clases**. Una clase, o subconjunto particional, es un grupo de elementos que tienen una característica específica, de forma significativa que los diferencia de los demás elementos que componen la Población Objetivo. La característica relevante para clasificar los objetos de una Población Objetivo se denomina **Criterio Taxonómico**. Como existe la posibilidad de que una Población Objetivo pueda clasificarse de varias maneras, siendo unas más importantes que otras, la clasificación más relevante (en relación a un interés científico específico) recibe el nombre de Clasificación Prima.

Definición Elemental de Estadígrafo:

Concluida la fase anterior, para cada una de las formas clasificatorias, la descripción continúa en la **construcción de estadígrafos**[53], que en un sentido sencillo, son parámetros que

49 El mínimo grado de un conocimiento científico positivo es el descriptivo.

50 Conceptos de los objetos que se pretende clasificar.

51 Ilustración: El estudio de los gases a temperaturas menores a 0 grados está limitado a ese rango de temperaturas. El estudio del comportamiento de los agentes políticos en una situación de convulsión social, se circunscribe a esa situación específica.

52 Un rango dentro de los modos en los que puede presentarse un fenómeno.

53 Cuyo concepto será desarrollado más adelante con mayor profundidad.

resumen las características más importantes de los atributos de los elementos que concurren en la conformación de la "Población Objetivo". La apreciación mediante un conjunto de parámetros de las características generales de cada una de las variables mediante las cuales se interpreta una Población Objetivo.

Fase Superior de la Descripción:

La fase superior y conclusiva de la descripción, consiste en la generación de correlaciones entre las variables descriptoras o la proposición de algoritmos específicos mediante los cuales pudieran estar estadísticamente relacionadas.

En un sentido estricto, la descripción debiera implicar también de forma previa la delimitación de los métodos, mediante los cuales se la realiza, la descripción de los propios instrumentos que se usan para describir.

Definición estricta del término Tesis:

(b) **EXPLICACIÓN.-** La segunda etapa del desarrollo de una ciencia positiva consiste en la generación de "Postulados Fenoménicos". **Tesis Empíricas**, que interrelacionan un conjunto de efectos observados de forma regular, de forma simultánea con un conjunto— generalmente más extenso[54]— de causas, bajo ciertas hipótesis de regulación que hacen específica la significación de las variables que representan las causas y los efectos concurrentes.

En sentido estricto, una tesis es un enunciado positivo, que postula[55] la relación entre efectos y causas, bajo ciertas reglas de delimitación (que se señalaron anteriormente) e hipótesis de concurrencia. Una Hipótesis de Concurrencia es un supuesto, respecto a las variables que conforman la tesis o a la forma en la que estas se relacionan[56].

Origen de la Explicación y discreción de Popper:

La explicación puede desarrollarse a partir de las regularidades estadísticas encontradas en la fase superior de la descripción o como un acto puramente intelectivo surgido a partir de una "Apreciación Común[57]" o de un acto científico de descripción que no alcanzó su pináculo. En la antonomasia del neopositivismo, su rigor metodológico exige la consecución de la última fase descriptiva, sin embargo el epistemólogo K. Popper, propone que la mayoría de las leyes positivas

54 Cuyo número de elementos es mayor, un conjunto de mayor cardinalidad.

55 Que intenta explicar un conjunto de efectos con un conjunto de causas.

56 El asumir a priori una determinada Correspondencia Causal, Jerarquía Causal o Dependencia Causal, implica enarbolar una Hipótesis de Concurrencia.

57 Una observación común y por tanto no sujetada al rigor metodológico.

ha tenido un origen menos riguroso, y han sido acuñadas mediante la **falsación**[58] de una tesis previa, aceptada como parte del "**Componente Normal**[59] de una ciencia.

Representación de una Tesis:

Se representa una tesis, o enunciado causal, de forma análoga a una relación funcional por los siguientes algoritmos:

$$E_1 = E_1(C_1, C_2, C_3 ....C_{n1}) + \mu_1$$
$$E_2 = E_1(C_1, C_2, C_3 ....C_{n1}) + \mu_2$$
$$E_3 = E_1(C_1, C_2, C_3 ....C_{n1}) + \mu_3$$

$$E_{n2} = E_1(C_1, C_2, C_3 ....C_{n1}) + \mu_{n2}$$

En los que $\mathbf{E_i}$ (i= 1,2,3..... n2) representa los **n2** efectos que se pretenden explicar, $\mathbf{C_i}$ (i= 1,2,3,...... **n1**) las n1 causas mediante las cuales éstos se explican y μ_i (i= 1,2,3.........n2) los factores de perturbación asociados a cada uno de los efectos.

Significado de los Factores de Perturbación:

Los factores de Perturbación representan las variables reducidas, es decir, que no han sido incorporadas en la tesis por ser consideradas poco importantes, se asume que su Esperanza Matemática es nula y su dispersión finita, además que entre ellos no existe correlación[60].

Dimensión Teórica del Objeto Científico:

La dimensión teórica, "a priori", de la explicación, correlacionada de forma estricta a la del objeto científico[61] y, correspondientemente de la Tesis, es el número (diferente) de variables que

58 Quiere decir mediante el uso de este término, inventado por el citado autor que; "Se erige una nueva teoría cuando se han encontrado suficientes argumentos estadísticos para rechazar una anterior". En términos estrictos, cuando una hipótesis nula puede ser rechazada por una alternativa con un determinado grado de significación".

59 De acuerdo a Feyerabend, en oposición a T. Kuhn en toda ciencia positiva, existe un "Componente Normal" ("Componente Racional")y un "Componente Filosófico" ("Componente Irracional"), el primero es el conjunto de postulados que se asumen en un tiempo plenamente válidos y que no son discutidos, en tanto que el segundo, representa las aporías que ameritan diversas interpretaciones, su solución continua posibilita el desarrollo de la ciencia y a la larga la revisión de su Componente Normal.

60 Lo anterior implica que los efectos tampoco están entre si correlacionados, la eventual correlación entre las causas, implica simplemente un problema de imperfección en la presentación del objeto científico.

61 La Dimensión del Objeto Científico, se denomina también, "Dimensión Estructural del Objeto Científico" y el número de Proposiciones Causales que contiene, "Dimensión Subestructural del Objeto Científico".

en ella intervienen[62], sin considerar los factores de perturbación. Cada una de las relaciones que explica un efecto determinado se llama **Enunciado Causal Protocolario**, con suficiente autonomía conceptual para explicar un efecto específico.

En cambio, la dimensión fáctica "a posteriori" de un objeto científico, es el número de datos vectoriales[63], cuya dimensión es igual a la dimensión teórica, que ha servido para corroborar (o para negar) la tesis que lo contiene. Por analogía, puede denominarse Dimensión de una Proposición Causal, refiriendo el número distinto de variables que ésta expresa[64].

CORRESPONDENCIA CAUSAL, JERARQUÍA CAUSAL Y DEPENDENCIA CAUSAL

CORRESPONDENCIA CAUSAL.- Se define como Correspondencia Causal, en un enunciado causal protocolario, como la ratio entre las variaciones del efecto y de una causa, ceteris paribus[65]. La Correspondencia Causal, se denomina también, "**Signo de la Relación Causal**[66]**".**

$$Correspondencia\ Causal = \frac{\Delta E_i}{\Delta C_j} \| \ \forall\ \Delta C_i = 0 \quad cuando\ i \neq j$$

En consideración a la asunción de que el efecto pueda variar, en alguna de las **Proposiciones Causales** únicamente por la variación de alguna de sus causas, cuando las otras permanecen inalteradas, la correspondencia causal es la variación del efecto, motivada por el cambio de una de sus causas.

CLASES DE CORRESPONDENCIA CAUSAL.- Existen tres posibilidades de manifestación de la correspondencia causal:

Directa. Cuando el cambio del efecto y de la causa ocurren en el mismo sentido, ambos suben o ambos bajan.

Inversa. Si acontecen en sentido contrario. Si la causa sube y el efecto baja o si la causa baja y el efecto sube.

62 Esta dimensión, en el caso de que la tesis no sea involutiva (Tesis Imperfecta), es decir que algunos efectos oficien en la propia tesis la función de causas, es la suma **n1+n2.**

63 Se ha agregado al final del texto un apéndice que explica de forma suficiente el significado de un vector.

64 Dimensión de una Subestructura.

65 Cuando todas las demás variables permanecen constantes en la proposición causal y; únicamente se estudia el cambio de dos variables que la integran. En una interpretación **continua**, es la Derivada Parcial de la variable dependiente, que representa al efecto "***i***", ocasionado por la variable independiente "***j***", que representa la causa que cambia; $Correspondencia\ Causal = \frac{\partial E_i}{\partial C_j}$

66 Con impropiedad es usado el apocope: "Signo Causal".

Nula. Si el cambio de la causa no origina ninguna variación en el efecto[67]. Sea cual sea el cambio de la causa el efecto permanece constante.

Directa:

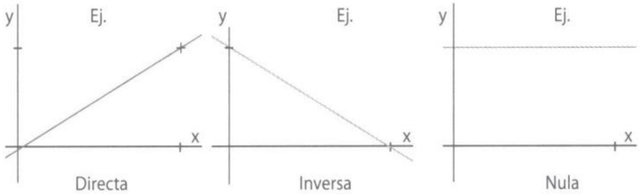
$$E_j \uparrow = E_j(\bar{C}_1, \bar{C}_2, ...C_i \uparrow ....\bar{C}_{n1}) \; o \; E_j \downarrow = E_j(\bar{C}_1, \bar{C}_2 ....C_i \downarrow ....\bar{C}_{n1})$$

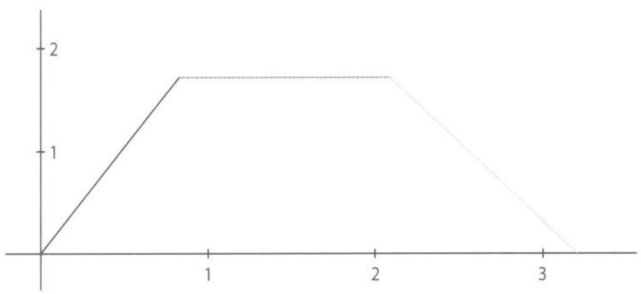
Inversa:

$$E_j \downarrow = E_j(\bar{C}_1, \bar{C}_2, ...C_i \uparrow ....\bar{C}_{n1}) \; o \; E_j \uparrow = E_j(\bar{C}_1, \bar{C}_2 ....C_i \downarrow ....\bar{C}_{n1})$$

Nula:

$$\bar{E}_j = E_j(\bar{C}_1, \bar{C}_2, ...C_i \uparrow ....\bar{C}_{n1}) \; o \; \bar{E}_j = E_j(\bar{C}_1, \bar{C}_2 ....C_i \downarrow ....\bar{C}_{n1})$$





Monotonía y No Monotonía de la Correspondencia Causal:

Cuando la correspondencia causal de una causa específica, permanece inalterada en su signo (en todo el campo de definición de la causa) se denomina: **Correspondencia Causal Monótona.** Sin embargo, es de esperar que en general no ocurra lo anterior, en ese caso la **Correspondencia Causal es No Monótona.**

Inversión de la Causalidad:

En las exposiciones teóricas incipientes se asume, por su naturaleza pedagógica, que la correspondencia causal es monótona. Por otra parte, el cambio de signo de la correspondencia causal se llama Inversión de la Causalidad o Inversión Causal. Como ilustración se enuncian tres casos de la inversión causal: 1) la densidad del agua en función de la temperatura, sube hasta los

67 En las representaciones matemáticas inmediatas, la flecha indica la dirección de la variación y la línea sobre la variable que está, permanece constante.

4 grados centígrados, en ese punto empieza a descender[68], 2) el ingreso corriente de una persona aumenta a lo largo de su vida y luego desciende[69] 3) la preferencia política de los ciudadanos se trastroca de opciones progresistas hacia opciones conservadoras a medida que aumenta su edad.

GRADO DE LA CORRESPONDENCIA CAUSAL

Se denomina grado de la correspondencia causal a la intensidad con la que la variable que representa la causa influye (céteris paribus) en la variable que representa al efecto. Es el tamaño o módulo de una correspondencia causal determinada[70].

Independientemente de que su signo por sí es importante, existen varias medidas de la Correspondencia Causal. Se enuncia como referencia, en las Proposiciones Causales Determinadas[71] el Coeficiente de Variaciones Absolutas[72], el Coeficiente de Variaciones Relativas[73]. El primero relaciona en un tramo, suficientemente restringido los cambios del efecto y de la causa en las unidades en las que estos son medidos, generando un indicador dimensional[74]; el segundo, una ratio adimensional señala, en un segmento, la variación de la variable efecto respecto de su valor inicial con la variación del valor de la variable causa, dividida entre su valor original[75] [76]. La segunda medida es más exacta cuando es menor el tamaño del segmento de

68 En la tesis positiva (física) de que la densidad del agua depende de su temperatura, existe hasta los cuatro grados centígrados una correspondencia causal directa, porque la densidad del agua sube (y por ello el hielo a cero grados flota sobre el agua líquida), luego sin embargo la correspondencia se hace inversa, disminuyendo cada vez más la densidad del agua, hasta que se convierte en vapor.

69 Como lo exponen los profesores Ando y Modigliani en su teoría del Ciclo Vitalicio. El ingreso de los jóvenes es exiguo, aumenta en la madurez y luego vuelve a disminuir en la vejez.

70 El valor de la correspondencia causal, sin tomar en cuenta su signo.

71 Proposiciones Causales Determinadas, son aquellas en las que no interviene un factor aleatorio y, en realidad el efecto resulta de una combinación (lineal o no lineal) de las causas componentes. Se cuestiona que las Proposiciones Causales Determinadas puedan considerarse propiamente como proposiciones positivas, aunque se las admite en estructuras en las que se explica más de un efecto.

72 El cambio absoluto del efecto dividido entre el cambio absoluto de una de sus causas, ceteris paribus,

$$\textit{Coeficiente de Variaciones Absolutas} = \frac{\Delta E_i}{\Delta C_i}$$

73

$$\textit{Coeficiente de Variaciones Relativas} = \frac{\frac{\Delta E_i}{E_i}}{\frac{\Delta C_i}{C_i}}$$

74 Que involucra en el numerador, las unidades en las que se mide el efecto y en el denominador las unidades en las que se presenta la causa.

75 El que se correspondía con el valor del efecto inicial.

76 Ilustración: Dada la proposición causal: "El peso específico de un sólido, "Q" es inversamente proporcional a la temperatura", ceteris páribus, se observa que cuando la temperatura aumenta de 70 a 75 grados, su densidad disminuye de 2 a 1.8 gramos por centímetro cúbico.

variación del efecto y tiene sentido si en este intervalo no se ha producido alguna inversión del signo de la relación causal.

En las Proposiciones Causales Estocásticas[77], la Covariancia y el Coeficiente de Correlación parcial[78], que indican el grado de dependencia lineal absoluta y relativa, respectivamente, entre dos variables, son indicadores adecuados del grado de la Correspondencia Causal.

MUTACIÓN CAUSAL

En el contexto explanado en los anteriores puntos, toma este nombre **el cambio de signo de la relación causal** y, consiguientemente de la forma en la que se presenta la correspondencia causal. Por lo que la **Mutación Causal**[79] puede ser:

(a) Positiva, si una correspondencia causal nula se convierte en directa[80].

(b) Negativa, si una correspondencia causal nula se convierte en inversa.

(c) Neutra, si una correspondencia causal positiva o negativa se convierte en nula.

(d) Transpositiva, si una correspondencia causal inversa se convierte en directa.

(e) Transnegativa, si una correspondencia causal directa se convierte en inversa.

VARIACIÓN DE LA INTENSIDAD CAUSAL

El cambio del grado de la correspondencia causal, sin que exista una mutación causal se denomina Variación de la Intensidad Causal.

La Variación de la Intensidad Causal puede ser:

Conclusiones:

a) El Signo de la Correspondencia Causal es negativo (Correspondencia Causal Inversa) porque a medida que aumenta la temperatura (causa variable) disminuye la densidad (variable efecto).

b)
$$\textit{Coeficiente de Variaciones Absolutas} = \frac{1.8gr/cm^3 - 2.0gr/cm^3}{75c - 70c} = -0.04gr/c\,cm^3$$

c)
$$\textit{Coeficiente de Variaciones Relativas} = \frac{\dfrac{1.8gr/cm^3 - 2.0gr/cm^3}{2.0gr/cm^3}}{\dfrac{75c - 70c}{70c}} = 1.4$$

77 En las que el efecto no depende únicamente de las causas sino además de ellas, de un factor aleatorio, cuya ley de probabilidades es conocida. Estas son propiamente proposiciones causales positivas.

78 Que serán estudiados en posteriores capítulos.

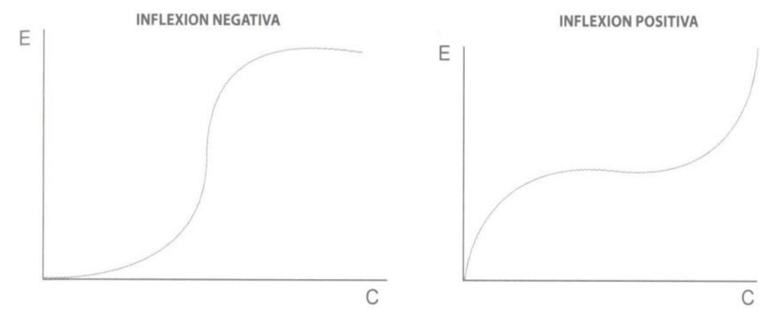
79 Es preferible pero poco usado el nombre de "Mutación de la Correspondencia Causal".

80 Si la Correspondencia Causal de ser Nula torna a Positiva.

(a) Nula, cuando el grado de la Correspondencia Causal Permanece Inalterado o equivalentemente la **Variación de la Correspondencia Causal es Cero**[81].

(b) Positiva, en el caso de que el Grado de la Correspondencia Causal sufra un incremento; la **Variación de la Correspondencia Causal es positiva**[82].

(c) Negativa, si el Grado de la Correspondencia Causal experimenta un descenso; **la Variación de la Correspondencia Causal es negativa**[83].



INFLEXIÓN DE LA INTENSIDAD CAUSAL

Toma este nombre el cambio de la intensidad de la correspondencia causal, de positiva a negativa o de negativa a positiva, sin que cambie el signo de la relación causal[84].

Si la intensidad de la correspondencia causal cambia de negativa a positiva la inflexión se denomina progresiva[85]. Si ocurre lo opuesto, es decir, la intensidad de la correspondencia causal de positiva transcurre a negativa, la inflexión se denomina regresiva[86].

81 La Relación Causal es Lineal y por tanto su correspondencia causal, $\frac{\Delta E_i}{\Delta C_j} = k$ es una constante.

82 La Relación Causal es Progresiva; e implica una variación de la Correspondencia Causal respecto a la variación de la causa, $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta E_i}{\Delta C_j}\right)}{\Delta C_j} > 0$

83 La Relación Causal es Regresiva, e implica una variación de la correspondencia causal, respecto a la variación de la causa.

84 La correspondencia causal conserve el mismo sentido.

85 El efecto que sube lentamente a medida que transcurre la causa antes del punto de inflexión y sube raudamente luego de éste ó el efecto desciende lentamente antes del punto de inflexión y luego de éste, lo hace rápidamente.

86 El efecto sube rápidamente antes del punto de inflexión y a partir de él lo hace lentamente o el efecto desciende rápidamente antes de este punto y luego lo hace lentamente.

JERARQUÍA EXTERNA E INTERNA EN UNA TESIS

Se denomina Jerarquía Externa de una Tesis (Jerarquía Teorética) a la ordenación de los efectos que se pretende explicar de acuerdo a la importancia que en la teoría positiva peculiar se les otorga. En una tesis compuesta[87], es de esperar que no todos los efectos que la integran tengan la misma importancia y que el investigador o una determinada "escuela"[88], definan a priori[89] cuales efectos son los más importantes.

Definición de "Campo Causal", Formas de Apreciación de las Causas:

Se denomina Jerarquía Interna o Jerarquía Causal a la importancia, que en un enunciado causal protocolario, que integra una tesis, simple o compleja tiene una causa en la explicación del efecto. Es decir que en una tesis compuesta existen tantas Jerarquías Internas como efectos distintos contiene[90].

En primera instancia se puede afirmar que existen dos clases de apreciaciones de la Jerarquía Causal, una subjetiva[91] o "cualitativa[92]" que no tiene mayor trascendencia para la ciencia positiva y, otra objetiva que posibilita la evaluación del Campo Causal, **entendido como un conjunto intervinculado de causas que intentan la generación de un efecto**.

Coeficientes de Elasticidad Causal, Orden de la Primacía Causal:

Para una apreciación objetiva de la jerarquía causal, se debe considerar, en un punto del objeto científico, cuáles son los tamaños[93] de las variaciones relativas del efecto, motivadas por la variación relativa unitaria de cada una de las causas, **Coeficientes de Elasticidad Causal[94]**. La importancia de cada una de las causas estará en correspondencia biyectiva con el orden decreciente de los coeficientes de elasticidad; es decir las causas con una mayor elasticidad serán

87 Cuya definición se explicitará más adelante en el presente capítulo.

88 Un enfoque gnoseológico específico respecto a un determinado ámbito que se pretende comprender.

89 La jerarquía teorética por lo anotado, se denomina también jerarquia a priori de una tesis.

90 **En una misma tesis, respecto a dos enunciados causales distintos que la integran, puede perfectamente ocurrir que causas que en uno son muy relevantes, adolezcan en la otra de esta calidad.**

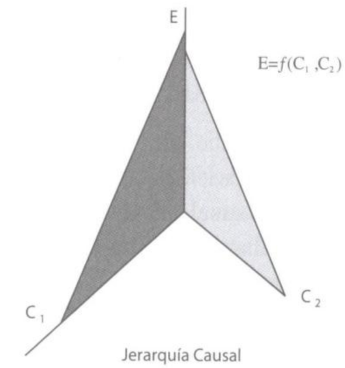
91 Que eventualmente puede tener una amplia importancia argumentativa.

92 La Jerarquía Causal, se denomina también, Jerarquia a Posteriori, en cuanto es la contrastación empírica la que la define, por lo que la jerarquía causal subjetiva, se opone al fundamento empírico de las ciencias positivas.

93 Las magnitudes en Valor Absoluto, es decir, sin que importe su signo.

94
$$elasticidad(E_j, C_i) = \frac{\frac{dE_j}{E_j}}{\frac{dC_i}{C_i}} = \frac{dE_j}{dC_i}\frac{C_i}{E_j} = \frac{d\ln E_j}{d\ln C_i}$$

más importantes. La ordenación de los coeficientes de elasticidad de mayor a menor, permite generar un **Orden de Primacia Causal[95]**.



Subespacio Causal Monótono, Inflexión Estructural de las Causas:

El espacio, n1+1 dimensional[96], en el cual no sufre variación la Jerarquía Causal y, por implicación no cambia el signo de la correspondencia causal, se denomina **Subespacio Causal Monótono**[97] y cada punto en el cual se produce una alteración de ese subespacio; en el campo de definición general del objeto científico parcial[98] o total, se denomina: **Inflexión Estructural de las Causas**. El referido subespacio, implica un ámbito de perfecta consistencia estructural de una teoría.

INTERDEPENDENCIA CAUSAL

Las causas que explican un efecto, pueden ser independientes, cuando no están relacionadas entre sí y dependientes cuando entre ellas existe alguna influencia.

Concausalidad y Discausalidad:

La interdependencia causal permite clasificar a las causas en **Concausales**; si las causas varían en el mismo sentido, **Discausales**; si lo hacen en sentido contrario e **Independientes**; si no tienen relación entre sí.

95 La causa más importante en este orden se denomina "Causa Primaria" o "Causa Principal".

96 Son "n1" causas más 1 efecto, la misma dimensión del objeto científico.

97 Subespacio de Fraconte.

98 En la situación de que se refiera únicamente a una proposición causal en una tesis compuesta.

Sobredeterminación Causal:

En el caso de que dos causas sean muy dependientes entre sí[99], por concausalidad o discausalidad, el enunciado causal está **sobredeterminado por exceso causal**[100].

Coeficiente de Interdependencia Causal, Elasticidad Intercausal:

En un enunciado causal protocolario, la ratio que tiene por numerador la variación relativa de una causa[101] y por denominador la variación unitaria de otra, ceteris paribus, se denomina: **Coeficiente de Interdependencia Causal**. En el caso de que las relaciones de variación sean relativas su cociente se denomina **Elasticidad Intercausal**. En el caso de los Enunciados Causales Estocásticos, de forma análoga a lo realizado para la correspondencia causal, se deberá considerar los coeficientes de correlación parciales.

UNIDIRECCIONALIDAD Y BIDIRECCIONALIDAD CAUSAL

Si en una relación fenoménica, la naturaleza de los hechos hace que en una tesis, una variable respecto a otra, sólo pueda estar bajo un orden no invertible causa efecto, las variables son entre sí unidireccionales[102], en otro caso, es decir cuando pueden permutarse el efecto por la causa sin que resulte de ello una "Proposición Positiva Absurda"[103], las variables son entre si bidireccionales[104]. El tiempo y el espacio[105], son un ejemplo de variables que únicamente pueden estar en una función unidireccional, como causas[106].

CLASIFICACIÓN DE LOS ENUNCIADOS CAUSALES (TESIS)

Un Enunciado Causal, también denominado "Tesis Positiva o por antonomasia simplemente "Tesis", de acuerdo a las causas que contiene, los efectos que involucra, la simetría de las

99 El tamaño del coeficiente de correlación lineal entre ellas sea muy alto, se acerque a la unidad, en consideración a que el campo de existencia de este parámetro fluctúa entre cero y uno.

100 Una de las causas está por demás, otro de los motivos para la sobredeterminación es la irrelevancia de una causa. Que se la incluya a pesar de ser su correspondencia causal, en todo el campo de existencia de la causa, nula.

101 El cambio que experimenta en relación al valor que tiene.

102 Polarizadas.

103 Que no se puede esperar por la naturaleza de los hechos. **Ilustración:** En la tesis: El Grado de la Salud de una persona depende de su edad cronológica", no puede trastrocarse a la proposición: La Edad Cronológica de una persona depende del Grado de su Salud".

104 En la terminología marxista, aunque no es muy exacto, existe entre ellas una relación dialéctica.

105 Considerados por Emanuel Kant en su "**Critica de la Razón Pura"** como nociones a priori, es decir que existen antes de cualquier otra cosa en el universo.

106 En la mecánica Relativista, pudieran ser un efecto de la masa de los cuerpos y relacionarse de una forma bidireccional entre sí y con aquella.

relaciones entre los efectos y causas, la forma de su relación y la dimensión temporal de sus variables, puede clasificarse de acuerdo a su:

(a) Dimensión Causal.

(b) Dimensión Efectiva.

(c) Simetría Causal.

(d) Forma de la Relación Causal (Clasificación Morfológica).

(e) Dinamicidad Causal.

DIMENSIÓN CAUSAL

Se puede clasificar una Tesis por el número de causas distintas que contiene, por lo que puede ser **Monocausal (Elemental) y Pluricausal (No Elemental)**

Los enunciados causales se separan en: **Elementales y No Elementales**. Cuando únicamente involucran una causa o más de una causa, respectivamente, es entonces elemental el explicar un efecto únicamente mediante una causa.

Para darle vigor a la importancia primaria de una causa en la explicación de un efecto, con un fin pedagógico, se suele asumir una proposición causal elemental, así por ejemplo en la Microeconomía se afirma que el precio guarda una correspondencia inversa con la cantidad demandada o en la Criminología se dice que el nivel de la criminalidad depende de factores de orden social. Estas teorías (tesis) sin embargo son elementales en cuanto el ámbito de existencia del objeto científico, con relevancia objetiva, presenta una mayor dimensión que la binaria.

Trivialización Teórica

La simplificación de un enunciado causal no elemental en uno elemental, mediante la elección de una causa que se asume de mayor jerarquía[107], se denomina "Trivialización Teórica[108]".

Ilustración: El enunciado causal: "La preferencia por un partido político, depende de la promoción de su ideología" es elemental, en cambio el que afirma:" La preferencia por un partido político depende del carisma de su líder y su ideología", es no elemental.

107 Es corriente denominar a la causa de mayor jerarquía "Causa Primaria".

108 Es bastante frecuente la Trivialización Teórica, en la enseñanza de la Criminología y de la Microeconomía en el primer caso tiene un carácter dramático cuando por un gran yerro epistemológico, en la exposición del desarrollo histórico de esta ciencia, se la presenta como una sucesión de tesis elementales contradictorias. Lombroso, Ferri, Garófalo, Criminología Crítica, etcétera, cuando lo adecuado es presentar su evolución en sujeción al cambio de la jerarquía interna y externa de las teorías que la sustentan.

DIMENSIÓN EFECTIVA

Por el número de efectos que contenga una tesis puede ser catalogada como: **Tesis Monotética (Simple) y Tesis Compuesta (Pluritética)**.

En el caso de que estén integrados por un único efecto (expliquen únicamente un efecto) los enunciados causales son simples. Cuando contengan más de un enunciado causal son compuestos.

Definición de Teoría Positiva

Una teoría positiva es una tesis pluritética suficientemente extensa, en la cual se ha definido de forma expresa o tácita una jerarquía de los efectos concurrentes.

Los enunciados causales que se han utilizado como ilustración en el anterior punto, son simples, en cambio aquel que expresa: "La preferencia electoral por un frente político depende del carisma de su candidato y en particular el resultado regional, de la composición étnica", es un enunciado causal compuesto.

CLASIFICACIÓN POR LA SIMETRÍA CAUSAL

De acuerdo al modo de la relación entre los efectos y las causas, en cuanto implique o no la inversión de los roles de estas entidades, las Tesis pueden ser: **Involutivas y No involutivas** (imperfectas y perfectas).

En la circunstancia de que al menos una variable oficie en la misma tesis la función de causa y también la de efecto, la tesis es involutiva y no lo es en caso diverso.

Ilustración: Si se dice, la preferencia por un partido político depende de la edad del candidato y la cantidad de dinero invertido en su promoción; además la cantidad de dinero invertido en su promoción depende de la región de la que proviene el candidato, se está en presencia de una enunciación compuesta e involutiva.

CLASIFICACIÓN DE ACUERDO A LA FORMA DEL ENUNCIADO CAUSAL

De acuerdo al grado de especificación de las relaciones funcionales que integran sus efectos con sus causas, las tesis pueden ser: **SIMPLEMENTE ENUNCIATIVAS Y ESTRUCTURADAS**.

Son Simplemente Enunciativas, cuando solamente indican la Relación Causal sin especificar su forma, dicen, en cada proposición causal singular: "estos efectos dependen de estas causas"[109], pero no dicen cual es la forma concreta en la cual dependen:

$E_i = f(C1, C2, C3......Cn) + u_i$

109 Indicando algunas veces la jerarquía causal, lo que no es suficiente para hacer la tesis Estructural.

Son Estructuradas[110], cuando se hace explícita la forma de relación de sus variables, mediante un algoritmo lógico o matemático[111]:

$E_i = \psi(C1, C2, C3......Cn) + u_i$

Expresión en la que ψ representa un algoritmo funcional específico, con mejor precisión el de una función vectorial de variable real[112].

En las ciencias físico-químicas, la mayor parte de las tesis son estructuradas en tanto que en las ciencias sociales son simplemente enunciativas. Así la Ley de Boyle: "El volumen de todo gas seco a temperatura constante es inversamente proporcional a la presión a la que se lo somete", es una Tesis estructurada, puesto que puede representarse por la expresión : $V = \frac{k}{P} + u$ en la que V es cualquier medida adecuada del volumen y P una medida idónea de la presión, siendo k una constante de proporcionalidad diferente para cada tipo de gas; u es un factor de error con esperanza matemática igual a cero y desviación típica finita, que subsume las variables que no se han tomado en cuenta, excepto la temperatura que explícitamente se tomó por constante.

CLASIFICACIÓN POR LA TEMPORALIDAD DE LAS VARIABLES

Por la significación temporal de las causas o de los efectos las tesis pueden ser: **Estáticas o Dinámicas**.

Un Enunciado Causal es Estático cuando, ninguna de sus causas es el tiempo o su mismo efecto con algún retardo. Los Enunciados Causales Estáticos se dividen a su vez en Sincrónicos y Diacrónicos.

En el caso especial de que se asuma que el efecto y la causa ocurren al mismo tiempo el enunciado causal se denomina "Sincrónico"[113] y en el caso de que ocurran en tiempos distintos se denomina "Diacrónico"[114].

Un Enunciado Causal es Dinámico en el caso de que alguno de sus efectos sea el cambio de una variable ocasionado por el tiempo, alguna de sus causas sea el tiempo o el mismo efecto con algún retardo. Los enunciados causales dinámicos de acuerdo a como se presenten las variables se escinden en **Enunciados Causales Discretos** y en **Enunciados Causales Continuos**.

110 También denominadas "Estructurales".

111 Cuando siendo la tesis compuesta, algunas de sus proposiciones causales son estructuradas, la tesis se denomina No Completamente Estructurada.

112 Que para cada uno de los puntos del Espacio Causal define un resultado, expresado en el efecto.

113 Se asume la proposición causal: $E_t = f(C1_t, C2_t, C3_t.........Cn_t)$ que generalmente se escribe sin los subíndices que denotan el tiempo, al asumirse que la causa y el efecto ocurren de forma simultánea.

114 Se asume la proposición causal: $E_t = f(C1_{t-k}, C2_{t-r}, C3_{t-s}.........Cn_{t-w})$ que denota que el efecto y la causa ocurren en tiempos distintos, no siendo necesario que todas las causas tengan el mismo nivel de rezagamiento con el efecto ni que alguna de ellas sea sincrónica con el citado.

Un Enunciado Causal Dinámico es Discreto si los rangos de las variables que representan a las causas o los efectos se hacen corresponder biyectivamente con un conjunto numerable y es Continuo si se hacen corresponder con el conjunto de los números reales o algunos de sus segmentos.

Ilustración. Se enuncia la Tesis: "**La preferencia por una ideología política (P) depende de la variación del crecimiento económico (dE) y del nivel de empleo (E)**", que puede representarse de manera simbólica por el algoritmo:

P = h(de, E)[115]

Esta tesis se sostiene sobre las hipótesis que definen cómo debe entenderse una ideología política de izquierda; cómo se mide la variación del crecimiento económico y cómo se evalúa el nivel de empleo. Además, de las reglas que determinan la circunscripción de la "Población Objetivo". Se la clasifica como una tesis No Elemental porque contiene dos causas: Simple, porque explica únicamente un efecto; (No Involutiva), en cuanto ninguna variable es a la vez en la tesis, causa y efecto[116]; Simplemente Enunciativa, porque propone simplemente la relación entre las causas y el efecto sin hacer explícita una forma específica; es también Estática, porque ninguna de sus variables es el tiempo o la ideología política vigente en un tiempo anterior y en esta última clasificación se la puede asumir como sincrónica en cuanto se supone que las causas se desarrollan en el mismo ámbito temporal que el efecto.

PRONÓSTICO (INFERENCIA)

La función más avanzada de una Ciencia Positiva consiste en la predicción de un resultado futuro, o en la acotación de un valor desconocido, sobre la base del conocimiento actual, mediante la utilización de los métodos de la Inferencia Estadística.

Cuando el pronóstico se refiere a la inferencia de un parámetro poblacional (de la "Población Objetivo") sobre la base de los resultados muestrales, se denomina: **Estimación Paramétrica**, que se desarrolla de forma puntual o mediante Intervalos de Confianza[117]. Si se refiere a la determinación de un valor futuro de una variable, en atención al estudio de una serie temporal que consigna datos actuales y pasados, el pronóstico se denomina **Extrapolación Temporal**[118]. Si en atención a un conjunto de datos, dentro de un rango, se pronostica el valor de otro, al interior del rango de los datos originalmente usados, se llama **Interpolación**[119].

115 La Preferencia Política, sigue la forma funcional "h" (una forma específica de interrelación entre las variables) cuyos argumentos son: la Variación del Crecimiento Económico y el Nivel de Empleo.

116 Aspecto que es obvio en una Tesis Simple.

117 Se desarrollará los métodos más adelante.

118 Se usa también este nombre, cuando se infiere fuera del rango de los datos, aun cuando no consignen una serie temporal.

119 Los métodos de la decisión científica están profundamente imbricados con la función de pronóstico.

En todo pronóstico científico, se debe asumir un nivel máximo de error y un nivel determinado de confianza, estas características específicas se aplican también a todo postulado generalizador en las ciencias fácticas. Se estudia en el siguiente punto el Error y la Confianza.

VEROSIMILITUD Y VALIDEZ DE LOS POSTULADOS DE LAS CIENCIAS POSITIVAS

Uno de los principios metodológicos supremos, tenidos por absolutos antes de la Revolución Epistemológica de Bacon es el principio del Tercero Excluido[120], que implica que una proposición es falsa o verdadera. En atención a ese principio se verifican las interrelaciones lógicas[121]. **En la Ciencia Positiva, los enunciados que se refieren a elementos que pertenecen a una Población Objetivo o a los parámetros de ésta, en general, son relativamente ciertos**[122]**.** Los postulados que se refieren a los elementos de una muestra y sus correspondientes estadígrafos, son absolutamente ciertos[123].

La verosimilitud de un postulado positivo es la calidad de credibilidad que tiene en atención a que ha sido obtenido siguiendo de forma estricta la metódica científico-positiva, es decir con denodado apego a los procedimientos que enseña la estadística. La Medida de la verosimilitud, el grado de credibilidad que tiene un postulado fáctico[124], se denomina probabilidad. Con mejor exactitud, también se denomina al nivel de credibilidad de un postulado científico, **Nivel de Confianza** y a su correlato complementario, su grado de precisión, **Nivel de Significación**[125].

En toda inferencia, a un determinado nivel de significación, existe un nivel de error, que es la máxima diferencia que se está dispuesto a tolerar, en la investigación científica, entre el parámetro buscado mediante la predicción y el verdadero valor del parámetro[126] poblacional.

120 Este principio lo desarrolla Aristóteles en su tratado de lógica, el Organom, aunque el mismo avizora en su teoría del "Acto y la Potencia" que existen cosas que aunque no son, tienen posibilidad de ser.

121 De la Ciencia Analítico Deductiva.

122 Porque la mayoría de las veces, son Postulados Inferenciales. Su certeza es absoluta, cuando son producto de un censo.

123 Postulados asertóricos o de observación directa.

124 O que una variable estocástica se materialice en un determinado valor. Más adelante se desarrollará un estudio detallado de la probabilidad.

125 El nivel de confianza es la probabilidad de lograr el resultado previsto y el nivel de significación, la probabilidad de que éste tenga relevancia científica.

126 Se entiende que el parámetro, se mide en sus unidades naturales. Más adelante se profundizará en la Teoría de los Errores.

Los métodos que permiten la predicción mediante el uso de tesis estructuradas, se denominan Métodos Econométricos[127]. Por aplicación circunstanciada en la Ciencia Política, recibirán el nombre de métodos Politicométricos.

En oposición a la verosimilitud, que se refiere a una calidad propia de los postulados fácticos, la validez es una calidad inherente a la interrelación de proposiciones lógicas. La verificación de que un Teorema sea tautológico con otro. En otras palabras, la calidad de que dos proposiciones lógicas complejas, que resultan de la composición de protocolos teoréticos[128], siguen las leyes de concatenación de la lógica y son equivalentes. De esta manera, la verificación de la validez de los enunciados positivos, se refiere a que sus **términos regulados**, resulten de una única **"Base de Categorías"**[129] y exista entre los significantes y significados una relación biyectiva[130].

FUNDAMENTACIÓN DE LA RELACIÓN HIPOSTÁTICA DE LA CIENCIA DE LA ESTADÍSTICA Y LA VEROSIMILITUD Y VALIDEZ DE TODA CIENCIA POSITIVA

Dos o más elementos se hallan relacionados entre sí en una relación hipostática, cuando pudiendo definirse de forma independiente, su existencia real sólo puede concebirse de forma conjunta.

Cualquier Ciencia Positiva existe y se puede atribuir a sus postulados un grado de verosimilitud, si y sólo si se han construido sobre la base de los datos recogidos en la observación mediante el método estadístico[131]. Por lo que **carece de sentido científico**[132]. Alguna afirmación de una realidad tangible, que no se sostenga en un fundamento estadístico, es una postura filosófica; una especulación vacía, un postulado bucólico o una creencia vulgar.

La validez de una teoría resulta de la sistematización de las observaciones factuales, en cuerpos proposicionales que luego son contrastados con la realidad de la que ha provenido la observación. La construcción de una teoría que explique una realidad positiva está condicionada a la significación de las proposiciones indivisibles que resultan de los datos o de su procesamiento, por lo que por más que su estructura tenga suficiente coherencia, si sus elementos constitutivos no

127 Estos métodos Estadísticos, no son exclusivos de la aplicación económica, su uso trasciende a todas las ciencias, como la física, la sociología y la Ciencia Política Positiva.

128 Una proposición lógica que contiene un juicio simple.

129 Es absurdo aunque muy frecuente, bajo el pretexto de la ecléctica hacer una exposición utilizando categorías marxistas y categorías de la Teoría Económica Marginalista.

130 Uno a uno y además que cada significado tenga su significante correspondiente y viceversa.

131 El único mediante el cual se pueden procesar los datos.

132 Utilizando las Palabras de Karl Popper en la Lógica de la investigación Científica.

tienen sentido científico[133] la teoría deja de tener validez positiva. Es una elucubración que parte de **premisas espurias**[134], una ciencia de lo imaginario.

Por lo que no existe Ciencia Positiva, que no utilice el método estadístico. Ni tiene sentido externo (no matemático) cualquier procedimiento, teorema o ley estadística que no resulte de la sistematización de observaciones empíricas, o sea aplicable, bajo supuestos no restrictivos al menos a la descripción de un proceso positivo[135].

EJERCICIOS RESUELTOS

I.1

1) Proponer una Tesis Política elemental y estructurada.
2) Expresar las hipótesis que sustentan sus variables.
3) Fundamentar su clasificación.
4) Esbozar mediante un esquicio la relación causal propuesta.
5) Proponer relaciones de correspondencia causal, jerarquía causal y dependencia causal.

Respuesta.-

1) TESIS:

"El desgaste político de una autoridad elegida es directamente proporcional al tiempo de ejercicio de su mandato".

Simbólicamente: $y = ct$

y = Desgaste Político.

t = Tiempo de duración del mandato.

c = Constante de proporcionalidad característica.

2) HIPÓTESIS:

(a) La variable "y" se la entiende como la aprobación, en una escala de 0 a 100 que señalará una encuesta a desarrollarse en distintos tiempos del mandato.

(b) El tiempo se mide en meses, a partir de la posesión de la autoridad.

133 Son susceptibles de ser verificados de forma objetiva.

134 Una **Premisa Espuria**, "Suposición Razonable" es aquella que se sustenta en el sentido común, mas no en una observación sistematizada o en una analogía con una realidad similar.

135 De la misma manera, asumiendo la variación que realiza Popper en la metódica positiva. Es imposible el establecer alguna falsación (la refutación de una teoría tenida por cierta) sin la suficiente fundamentación estadística.

3) La tesis es estructurada porque su enunciado permite determinar una forma matemática, que es precisamente la que se señala al expresar la tesis simbólicamente. La tesis es elemental porque contiene únicamente una causa.

4) La correspondencia causal es directa, por el propio enunciado de la tesis, quiere decir que a medida que se incrementa el valor de la causa, se incrementa el valor del efecto y viceversa. No se pueden establecer relaciones de dependencia causal ni de jerarquía causal por ser una tesis elemental.

I.2

1) Proponer una tesis política simplemente enunciativa y no elemental.
2) Hacer explícitas las hipótesis respecto a sus variables.
3) Expresar hipótesis delimitativas del objeto científico.
4) Fundamentar la clasificación, referida en el enunciado.
5) Proponer relaciones de correspondencia causal, jerarquía causal y dependencia causal.

Respuesta.-

1) TESIS:

"La preferencia por un candidato, depende de su sexo, su edad y su grado de formación académica".

Simbólicamente: $\mathbf{p = \mathit{f}(s, f, e)}$

p = Preferencia.

s = Sexo.

e = Edad.

f = Formación Académica.

2) HIPÓTESIS RESPECTO A LAS VARIABLES:

(a) La preferencia se la asume como la intensión de apoyarlo en una elección. Una variable binaria en la que "0" significará que no se lo apoyará en la elección y "1" que se le dará el respaldo.

(b) El sexo en su sentido natural, "1" representará a las mujeres y "2" a los hombres.

(c) Se la medirá en años, a partir de la edad para ejercer el derecho al voto, hasta una edad razonablemente alta después de la cual no se esperen electores, de 18 a 90 años.

(d) La formación académica, en términos de los títulos obtenidos, será "0" si no se cuenta con algún título, "1" si se tiene título de bachiller, "2" si tiene título de técnico "3", si tiene título de licenciado y"4" si tiene un título de mayor jerarquía.

3) HIPÓTESIS DELIMITATIVAS DE LA TESIS:

(a) Se limita espacialmente a las circunscripciones electorales bolivianas.

(b) Se limita temporalmente de 2006 a la actualidad.

(c) Se limita sustancialmente a las elecciones para Alcaldes y Concejales.

4) **FUNDAMENTACIÓN DE LA CLASIFICACIÓN DE LA TESIS:** La tesis es **Simplemente Enunciativa**, porque no predefine una relación lógica o matemática de intervinculación de las variables, es **No Elemental**, debido a que involucra en la explicación del efecto más de una causa.

5) **CORRESPONDENCIA CAUSAL:** Se propone que, en una proporción mayor a los hombres, las mujeres prefieren al candidato (correspondencia inversa por la transformación de las variables); que las personas menores (inversa) y las de mayor formación académica (directa).

6) **JERARQUÍA CAUSAL:** Se propone que, la causa más importante en la determinación de la preferencia es la formación académica, luego la edad y por último el sexo.

7) **DEPENDENCIA CAUSAL:** "A priori la contrastación empírica, se asume que no existe ninguna dependencia entre el sexo y la edad, como no la hay entre el sexo y la formación académica, pero se asume que existe una dependencia causal directa entre la edad y la formación académica".

I.3.-

1) Proponer una tesis política, simplemente enunciativa, no elemental, involutiva y compuesta.
2) Proponer para entenderla un conjunto de hipótesis de concurrencia.
3) Fundamentar su clasificación.
4) Proponer relaciones de correspondencia causal, jerarquía causal y dependencia causal.
5) En la segunda proposición causal protocolaria, discurrir la existencia de correspondencia causal no monótona.

1) TESIS:

"La preferencia política por opciones conservadoras se manifiestan cuando existe un deterioro del nivel del ingreso nacional, un crecimiento del déficit fiscal o inflación monetaria. La gobernabilidad en esta situación se degrada debido a la disminución del tamaño del núcleo político y el consiguiente crecimiento de las fuerzas asistemáticas. Sin embargo, una condición del crecimiento del ingreso nacional, es la gobernabilidad del sistema político y el nivel de las reservas internacionales".

Simbólicamente: **p = *f*(yn, df, in)**

g = *g*(np)

in= h(g, ri)

p = Preferencia política por partidos que expresen una ideología conservadora.

yn = Nivel del ingreso nacional.

df = Variación del nivel del déficit fiscal.

in = Variación del nivel general de los precios.

np = Tamaño del núcleo político.

g = Nivel de gobernabilidad.

ri = Reservas internacionales.

2) **Como Hipótesis Delimitativas**, se postula que el objeto científico se delimita espacialmente en Bolivia, temporalmente desde 1985 a nuestros días y sustancialmente a la preferencia política por los postulantes a Presidente y Vicepresidente.

Como Hipótesis propias de las Variables, se asume que la preferencia por opciones conservadoras, se refiere a la predisposición de la ciudadanía a elegir en elecciones Nacionales a quienes propugnen el crecimiento económico, entonces será el nivel de la votación de esas fuerzas políticas, de forma agregada, el contenido de la variable **g**.

El ingreso Nacional, **yn** es una variable definida en las cuentas Nacionales por lo que se circunscribirá a la forma en la cual la presenta el Banco Central. Sin embargo, su nivel tendrá sentido únicamente en los periodos en los que se produzca un resultado electoral.

Lo referido para el ingreso Nacional, puede asumirse por analogía, para el déficit fiscal, **df**; la variación del nivel general de precios (que puede ser asumida como la variación del índice de precios al consumidor) **in**; y el nivel de las reservas internacionales, **ri**.

El grado de gobernabilidad **g**, es una variable técnica que puede ser desarrollada mediante una escala por la opinión técnica de un politólogo.

El tamaño del núcleo político, **np**, se puede determinar mediante las técnicas que se enseñarán en el capítulo sexto (Aplicaciones de los Estadígrafos de Dispersión en la Ciencia Política).

3) **Clasificación de la Tesis**: La tesis es compuesta, debido a que su estructura involucra más de una relación fenoménica (proposición causal protocolaria). Es simplemente enunciativa, porque no propone formas lógicas o matemáticas mediante alguno de sus enunciados. Es involutiva, porque al menos una de las variables, en este caso la gobernabilidad, **g,** oficia en la tesis en el segundo enunciado la función de efecto, en tanto que en el tercer enunciado se

presenta como causa. Al estar al menos uno de sus enunciados causales integrado por más de una causa la tesis es no elemental.

4) **En el primer enunciado causal**, por la propia tesis, la correspondencia causal del ingreso Nacional es inversa y del déficit fiscal y el nivel de inflación son directas.

En el segundo enunciado causal, que es un postulado fáctico elemental, la correspondencia causal es directa, como lo expresa la tesis.

En el tercer enunciado causal, por lo que afirma la tesis, la correspondencia causal de la gobernabilidad es directa y se propone que la consiguiente de las reservas internacionales sea también directa.

Para el primer enunciado causal se puede asumir que la inflación tiene más jerarquía explicativa que el ingreso nacional y el déficit fiscal de menos jerarquía que este.

En el segundo enunciado causal, no se puede referir a jerarquía causal al ser un postulado elemental.

En el tercer enunciado causal, se asume que las reservas internacionales tienen mayor jerarquía causal que la gobernabilidad.

En el primer enunciado causal, se propone que existe una alta dependencia directa entre el nivel de la inflación y el déficit fiscal. Una moderada dependencia positiva entre la inflación y el déficit fiscal, una dependencia tendiente a la nulidad entre el ingreso nacional y el déficit fiscal.

5) Si bien el aumento del tamaño del núcleo político, aumenta la gobernabilidad, un tamaño excesivo, la reduce, debido a que una fuerza política se legitima, en cuanto enfrenta a una fuerza de oposición importante,[136] además cuando el núcleo político es demasiado extenso existe la posibilidad de que en su propio seno se generen reacciones opositoras. Por lo que, existe un tamaño óptimo del núcleo político, pasado el cual se debe esperar la inversión de la correspondencia causal de directa a inversa, en su influencia en la gobernabilidad.

136 Un nivel adecuado de estímulo político. En este texto no se intenta la discusión de este aspecto que exige un mayor dominio de la Teoría Política.

Capítulo Segundo

HISTORIA Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES INHERENTES A LA CIENCIA DE LA ESTADÍSTICA

SINOPSIS DE LA HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA

La Estadística como ciencia, se desarrolla de forma independiente de las ciencias positivas, es decir sus causes históricos son diferentes —es más antiguo el de la estadística— y aunque se trasvasan circunstancialmente, alcanzan su confluencia definitiva mediante los aportes del fundador de la Ciencia Positiva, Galileo Galilei, expresa alrededor de 1620 lo siguiente: ***"La nueva ciencia tiene por base datos de la experiencia traducidos en fórmulas matemáticas".***

En las civilizaciones antiguas, que existieron antes de la caída del Imperio Romano de Occidente (476 D.C.), aparece como un conjunto de técnicas dirigidas principalmente a servir al registro de la producción agrícola y el cobro de impuestos. Por lo que primordialmente su génesis tiene lugar en civilizaciones que dan preferencia a la solución de problemas prácticos como la de Egipto y Roma y no en las de Babilonia y Grecia, concentradas respectivamente en problemas astrológicos[137] y geométricos abstractos[138]. Se tiene certeza de que los Egipcios conocieron la media aritmética y la media cuadrática[139] y de los registros estadísticos que aparecen en el libro de los números[140], es evidente que los israelitas la usaron con suficiente prolijidad, sin embargo el avance más notorio acaece en la civilización China mediante el registro de los acontecimientos astronómicos, por más de 600 años, y la predicción de los eclipses. En América, los Incas llevaban

137 La aspiración de los babilónicos fue la de construir a perfección un "mapa sideral" en el entendido de que mediante el podría conocerse perfectamente el futuro.

138 Los griegos desarrollaron grandes avances en la geometría, su principal matemático fue Euclides quien estableció los principios de la geometría en una trascendental obra denominada LOS ELEMENTOS.

139 La primera, para tener una idea general de las crecidas del Nilo y la segunda, para desarrollar sus perfectas construcciones monumentales.

140 Que es uno de los libros del Pentateuco.

un registro estadístico de sus cosechas mediante los quipus en cambio los Mayas realizaron predicciones en atención a los datos del movimiento de las estrellas recogidos durante 660 años.

Durante la Edad Media, no existió un avance significativo excepto las técnicas de registro desarrolladas por los monjes, para efectos del control de los inventarios en los monasterios y la rendición de cuentas de los frutos de la propiedad feudal de la Iglesia Católica. Es así que el padre de las técnicas del Registro Contable es un Clérigo Italiano de apellido Pacciolo.

Durante la época moderna, es debido a la necesidad de efectuar censos, para el cobro de impuestos en los recientemente formados estados nacionales que se produce un notorio progreso, de este requerimiento surge su nombre, con mucha probabilidad a un profesor de la Universidad alemana de Gotingen; Achenwall[141], quien en las proximidades de 1760, establece las notas y las características básicas de las técnicas del registro de los datos[142], que luego serán el fundamento de la Estadística Descriptiva, denominándoles "Estadística" y afirmando que estos métodos constituyen: ***"La ciencia del registro de las cosas que pertenecen al Estado".*** Se debe destacar también en estos tiempos, el impulso a su desarrollo que le otorgan los Ingleses: John Graunt, demógrafo que avizora la metódica de la Inferencia Estadística y William Petty que en su libro Aritmética Política, establece las bases fácticas para el desarrollo de la Ciencia de la Economía.

En el transcurso del siglo XVII, como un tributo al cause que sigue la sistematización de los datos, se inicia el Cálculo de Probabilidades, cuyo interés es la predicción de los resultados de los juegos de azar. Este impulso que también representa una revolución metódológica, se verifica por las contribuciones de los matemáticos Enrique Fermant y Blas Pascal.

En el siglo XVIII el italiano Santiago Bernoulli establece el primer teorema general del cálculo de probabilidades, definiendo las condiciones generales que asignan probabilidad a un suceso cuya ocurrencia en éxito o fracaso depende del alea. Por fin a principios del siglo XIX , erige como ciencia, el cálculo de probabilidades, Baptista Laplace, mediante sus obras: ***Teoría Analítica de la Probabilidad y Ensayo Filosófico Sobre las Probabilidades.*** Esta consolidación epistemológica, convierte también a los métodos estadísticos en una verdadera ciencia. A finales de este siglo se destaca la Teoría de los Errores de Gauss y las profundas aplicaciones de Quetelet.

DEFINICIONES DE LA ESTADÍSTICA

A priori su función, la Estadística es una Ciencia Matemática, que con independencia al ámbito al que se la destine genera teoremas y formulaciones que permiten operativizar[143] los datos.

141 Para muchos Achenwall es el verdadero Fundador de la Ciencia Política Positiva por su conocida frase: ***"La Política enseña cómo deben ser los Estados, la Estadística Explica como son Realmente".***

142 Aunque todavía no se les da ese nombre.

143 Hacerlos susceptibles de someterse a operaciones matemáticas.

Antes de proponer definiciones de la Estadística, se debe enunciar que otra división importante de la Estadística es la que de acuerdo a su **objeto,** la divide en **Estadística Matemática y en Estadística Aplicada.** La primera estudia las leyes matemáticas que rigen los procedimientos de introspección de una realidad en abstracto, fundamentalmente las leyes que rigen el Cálculo de Probabilidades, en tanto que la segunda, lo hace como una propedéutica destinada a servir a la observación o la contrastación empírica en una ciencia positiva en concreto.

En sujeción al contexto, se puede definir la Estadística[144] de las siguientes maneras:

a) **DEFINICIÓN CONNOTATIVA.-** ***"Es el instrumento esencial de la Ciencia Positiva en cuanto posibilita la observación de una realidad y la contrastación empírica de las teorías que la explican".*** Es decir, no existe Ciencia Positiva independientemente de la estadística, ni científico positivo que ignore la estadística, en cuanto es imposible la construcción de una teoría positiva que ignore las determinaciones metódicas de la estadística.

b) **DEFINICIÓN DENOTATIVA.-** ***Es la ciencia cuyo objeto práctico es el desarrollo de los métodos y las técnicas de recolección, organización, resumen e inferencia de los datos inherentes a una Realidad Positiva.*** Se hace referencia a "Objeto Práctico", para establecer diferencia con el objeto de la Estadística Matemática.

c) **DEFINICIÓN DE LA ESTADÍSTICA COMO "ESTADÍSTICA MATEMÁTICA".-** ***Es la rama de la Matemática, que se concentra en la generación de algoritmos destinados a la recolección de datos y a la generación de operaciones matemáticas[145] que los hagan inteligibles.***

   Es el capítulo de la matemática, que estudia las variables Estadísticas Descriptivas y Estocásticas y su significado en relación al sustrato que contienen los datos.

   La Estadística Matemática es una ciencia especulativa, en cuanto no le interesa la solución de las necesidades humanas que eventualmente pudieran lograr sus teoremas.

d) **DEFINICIÓN DE LA ESTADÍSTICA COMO "ESTADÍSTICA APLICADA".-** ***Es un conjunto de técnicas y procedimientos que permite el desarrollo de operaciones con los datos de una realidad, de modo que posibiliten que esta sea comprensible a efecto de entenderla y solucionar los problemas que le son inherentes.***

144 Debiera denominarse "Ciencia de la Estadística", pero la elipsis que resulta de la supresión del término prefijo, "Ciencia", se ha hecho corriente, por lo que cuando decimos Estadística, nos estamos refiriendo a la "Ciencia Estadística".

145 El uso de este término, que pareciera introduce un pleonasmo es necesario para diferenciar la operación matemática con la Operación Informática, que también tiene por sustento los datos.

Es la ciencia propedéutica (instrumental) que permite la realización de la observación y la contrastación empírica, necesarias en toda Ciencia Positiva.

Es el conjunto de técnicas matemáticas que posibilitan el procesamiento de los datos de una realidad con una finalidad utilitaria.

e) **DEFINICIÓN DE LA ESTADÍSTICA COMO "SUSTRATO DE DATOS".-** ***Es el conjunto de datos mediante los cuales se presenta una realidad para ser comprensible de forma objetiva.***

   Es el conjunto objetivado de observaciones mediante las cuales se puede conocer y comunicar una realidad fáctica previamente delimitada.

DIVISIÓN DE LA ESTADÍSTICA APLICADA

La Estadística Aplicada, se escinde en Estadística Descriptiva y Estadística Inferencial.

LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.- Genera las operaciones que permiten la Acotación, la Recolección, el Resumen, la Clasificación y la presentación de los datos de una realidad positiva.

a) **Acotación.-** Circunscribirlos dentro de límites determinados, especificando su naturaleza.

b) **Recolección.-** Modo mediante el cual pueden ser obtenidos, para que integren una Base de Datos.

c) **Resumen.-** Técnica que permite entender una multiplicidad mediante la determinación de las características más relevantes que son inherentes a todos sus componentes.

d) **Clasificación.-** Separación de los datos en categorías disjuntas. Partición del sustrato original de los datos en atención a características importantes que los hacen similares y otras que los hacen diferentes.

e) **Presentación.-** Forma en la cual se los comunica al público común, de modo que sea fácil su entendimiento y a través de él, de la realidad positiva de la cual provienen.

LA ESTADÍSTICA INFERENCIAL.- Proporciona las operaciones mediante las cuales se pueden pronosticar parámetros o comportamientos desconocidos referentes a una Población Objetivo. Comprende principalmente la comprensión de la Variable Aleatoria, añeja a un espacio de probabilidades, la Teoría de la decisión científica entre varias hipótesis, la Estimación de los Parámetros Poblacionales, El análisis de la Correlación y de la Regresión.

Supra, se desarrollarán con detalle estos conceptos sin embargo en prima facie los esbozaremos de la siguiente manera:

f) **VARIABLE ALEATORIA.-** Es la entidad simbólica mediante la cual se representan sucesos que dependen del azar, si a esta variable puede hacerse corresponder a un campo de probabilidad que puede ser representado por una función de cuantía o una función de densidad de probabilidad, es una Variable de Riesgo en otro caso es una Variable de Incertidumbre, la Inferencia Estadística, estudia únicamente los acontecimientos que son susceptibles de ser descritos por un modelo matemático, acontecimientos de riesgo.

g) **LA TEORÍA DE LA DECISIÓN CIENTÍFICA.-** Es el conjunto de procedimientos que permiten decidir a un determinado nivel de confianza y en atención a una función de distribución muestral, que parámetro poblacional se considera verdadero o si un determinado modelo matemático es suficientemente bondadoso en el ajuste matemático de los datos.

h) **LA TEORÍA DE LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS POBLACIONALES.-** Que nos permite inferir, con un grado de probabilidad, cual es el valor de un parámetro poblacional (Media, Variancia, Desviación Típica, Etc.) En atención a los datos que proporciona una muestra de la población indicada. Como un complemento, permite el cálculo del error de la estimación y la determinación del tamaño de la muestra para alcanzar un acotado nivel de error.

i) **EL ANÁLISIS DE LA CORRELACIÓN Y LA REGRESIÓN.-** El primero comprende la verificación de relaciones causales reales, que se proponen en las tesis mediante correlaciones matemáticas. El segundo, la determinación de modelos matemáticos, generalmente sujetos a funciones algebraicas (tesis estructuradas) son las que permiten el pronóstico.

Capítulo Tercero

VARIABLES, DATOS, BASE DE DATOS, Y DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

VARIABLES ESTADÍSTICAS

VARIABLE

- **Una Variable es una entidad simbólica que representa una multiplicidad de atributos del mismo género.**
- Una Variable es la comprensión y la delimitación de los elementos de un género mediante una cantidad limitada de sus atributos.
- Una Variable es la representación de un conjunto de vectores que conforman un subespacio **n** dimensional. Cada uno de los elementos de ese vector se puede considerar una variable unidimensional.

VARIABLE ESTADÍSTICA

Es la Variable Cuantitativa Discreta o Continua, que representa un conjunto de datos existentes (descriptiva) o los elementos de un Espacio Muestral[146].

Las Variables Estadísticas, en atención a la naturaleza de los atributos que representan, son:

VARIABLES CUANTITATIVAS.- Cuando representan atributos directamente mensurables, es decir cuyos valores pueden corresponderse directamente y de forma biyectiva a los elementos de un conjunto numérico. En las variables cuantitativas su campo de existencia está determinado por un Minorante, el menor valor que puede adquirir la variable y un Mayorante, el máximo valor que puede tomar.

146 Un conjunto de eventos que dependen del azar.

VARIABLES CUALITATIVAS.- Cuando los atributos que representan no pueden de forma directa (sin la necesidad de una transformación) hacerse corresponder a los elementos de un conjunto numérico.

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES CUANTITATIVAS

Las Variables Cuantitativas a su vez son Discretas y Continuas, las primeras representan atributos mensurables numerables finitos o infinitos, en tanto que las segundas representan atributos mensurables no numerables.

Si consideramos a cada uno de los elementos de una Variable Vectorial[147], por sí una variable, una variable vectorial puede ser mixta en cuanto esté integrada por elementos numerables y elementos no numerables.

VARIABLE DESCRIPTIVA Y VARIABLE ALEATORIA

Por otra parte, de acuerdo a la certeza de los atributos que representan, las variables se dividen en Variable Descriptiva y Variable Estocástica. Una Variable Descriptiva[148], es aquella que representa atributos de elementos de cuya existencia se tiene certeza y una Variable Estocástica representa atributos de elementos que pertenecen a un Espacio Muestral, es decir que son resultados eventuales de la producción de un experimento que depende del alea.

En la exposición de los métodos y de la teoría de la Estadística Descriptiva, se considerará que las variables son Descriptivas en tanto que en los correspondientes de la Inferencia Estadística, se considera que las variables son Estocásticas.

CAMPO DE DEFINICIÓN DE UNA VARIABLE, INTERVALOS DE CLASE Y SEGMENTOS

Se denomina Campo de Definición, Campo de Existencia, Rango o Dominio de una Variable, al total de valores que adquiere o puede adquirir según sea una variable descriptiva o estocástica respectivamente.

En el caso de que la variable sea discreta, el campo de definición de una variable se define como el conjunto de valores del conjunto numerable que la representa, comprendidos entre un minorante y un mayorante, cuando cualquiera de los parámetros referidos sea un elemento del campo de definición, el Campo de Definición es cerrado, en caso diverso es abierto. Si sobre este Campo de Definición se establece una partición los elementos de esta se denominan **Intervalos de Clase o simplemente Clases**. En general se representan los intervalos de clase por sus **Marcas de Clase,** que son el promedio de su mayorante y minorante.

147 Un vector, es un conjunto ordenado de elementos.

148 Denominada también Variable Determinística.

Si la variable es continua su campo de definición que suele denominase espacio de la variable son todos los infinitos valores que son mayores que el minorante y menores que el mayorante. Si sobre el campo de definición, se establece una partición sus elementos se denominan segmentos o subespacios de la variable.

TRANSFORMACIÓN DE LAS VARIABLES CUALITATIVAS EN VARIABLES CUANTITATIVAS[149]

En la generalidad de los casos, no se pueden realizar operaciones utilizando de forma directa variables cualitativas, por lo que es necesario convertirlas previamente en Variables Cuantitativas Discretas. Esta operación, significa el establecimiento de una relación biyectiva entre el Conjunto Cualitativo Original[150], con otro conjunto numérico finito y numerable[151]. La secuencia de conversión, tiene las siguientes fases:

1) Se establece un **Criterio de Ordenación de los elementos del conjunto original**
2) Se elige el conjunto numérico finito y numerable, denominado **Conjunto de Proyección.**
3) Se asigna a cada valor numérico del último conjunto, de manera biyectiva y en sujeción al criterio de ordenación un elemento del conjunto original. Los elementos del Conjunto de Proyección se constituyen en la Variable Transformada.

A la operación de transformación en concreto, se le denomina **Patrón de Conversión de la Variable Cualitativa "X" en la Variable Cuantitativa "Y"** y no puede dejar de ser tomada en cuenta en la interpretación de cualquier operación acaecida mediante **Y** en referencia a su significación con **X.**

Ilustración.- En una determinada realidad política se cuenta con cinco partidos a, b, c, d, e los cuales, quieren ser investigados utilizando la metódica de la ciencia positiva.

La consecución preparatoria de este propósito exige secuencialmente:

1) Que se considere los partidos descritos como un género, es decir como un conjunto cuya existencia implica la determinación de una Razón de Pertenencia[152]: a, b, c, d, e.

149 **Transformación Real.- Suelen los ingenuos, ignorantes de las técnicas elementales de la matemática, afirmar que:"** ***En las ciencias sociales la mayoría de las variables son cualitativas por ello en la mayoría de los casos la estadística es inaplicable".*** La anterior afirmación hace patente su desconocimiento del sencillo método de conversión que posibilita la utilización de los potentes métodos de la Ciencia Estadística.

150 Denotado de forma abreviada como Conjunto Original, o también como "Base Cualitativa" de una investigación positiva, cuando el estudio se refiere a una única variable cualitativa. En otro caso, la reunión de todos los conjuntos originalmente cualitativos se considerara la "Base Cualitativa".

151 Es evidente que los conjuntos que refieren atributos cualitativos, las Bases Cualitativas, son finito numerables.

152 Razón de Conjunción.

2) La elección de un criterio de ordenación aplicable a este conjunto, como por ejemplo ordenar sus elementos de acuerdo a su proximidad con los valores de la "izquierda"[153]. Es decir se le asignará un grado mayor a un partido político mientras más se aleje de la izquierda. Por ejemplo: b, c, a, d, e.

3) El emparejamiento secuencial biyectivo de cada uno de estos elementos con los primeros cinco elementos del conjunto de los números naturales: {(b,1), (c,2), (a,3), (d,4), (e,5)}. El conjunto de los segundos elementos de las dupletas constituye el conjunto de proyección; {1, 2, 3, 4, 5}.

4) La nueva variable se la entiende mediante el Patrón de Transformación que se expresa en el anterior punto.

CONVERSIÓN DE UNA VARIABLE CONTINUA EN UNA VARIABLE DISCRETA[154]

Muchas veces resulta conveniente transformar una Variable Continúa en otra discreta, esto acontece porque esta forma de presentación facilita la "Comprensión Estadística"[155]. Esta operación se subordina a la siguiente secuencia:

1) Se segmenta el Campo de Existencia[156] en intervalos disjuntos, en lo posible del mismo tamaño. El número de los intervalos deberá elegirse de forma conveniente a la finalidad de la transformación.

2) Se encuentran las Marcas de Clase[157] de cada uno de los intervalos.

3) La nueva variable está constituida por la reunión de las marcas de clase.

Una vez aceptada la transformación, cualquier valor original se reducirá a la marca de clase correspondiente. En el caso de que los Intervalos de Transformación sean del mismo tamaño, el **Error de Transformación** es la mitad de su dimensión; en caso diverso el error de transformación es la mitad de la media de su dimensión.

153 Este criterio, frecuentemente usado por los Politólogos, que permite la construcción de un "Espectro Político" se denomina Criterio Hegeliano.

154 Transformación Matemática.

155 Se define por Comprensión Estadística: "**Al entendimiento de una realidad mediante un conjunto de datos suficientemente relevantes".** Es notorio que una multiplicidad muy extensa hará que los datos que la expresan (describen o explican), considerados de forma individual, no sean suficientemente relevantes.

156 El Rango en el cual esta definida la variable cuantitativa.

157 **Se define Marca de Clase, como el Promedio del mayorante y un minorante de un intervalo. Es un parámetro, que representa los elementos que contiene un intervalo.**

OPERACIÓN ESTADÍSTICA Y OPERATIVIZACIÓN DE UNA VARIABLE

En general, se denomina operación a la interrelación de los elementos de un conjunto entre sí o con los elementos de otro conjunto, en sujeción a determinadas leyes de composición internas o externas logrando un resultado.

Una Operación Estadística, es el algoritmo que interrelaciona una o más variables estadísticas bajo determinadas leyes estrictas y predefinidas, denominadas **"normas estadísticas de composición"** generando un resultado que se llama Producto Estadístico, el cual en general es un parámetro.

Las transformaciones que en el anterior punto se han descrito, constituyen formas de operativización de una variable[158]: Hacer que una variable original que no es operativa se convierta en otra con capacidad de representar un factor en determinadas operaciones estadísticas. En la Estadística Descriptiva, las variables operacionales son Discretas.

CONCEPTUALIZACIÓN DEL SIGNIFICANTE "DATO" Y CONCEPTO DE "DATOS CONGRUENTES"

En atención a que la Estadística es la ciencia que sistematiza el estudio de los datos, se hace necesaria la adecuada conceptualización de esté término.

Definición:

- ***Un dato, es la observación precisa y puntual[159] de los elementos de una determinada Realidad Positiva.***
- ***Un dato, es la expresión mediante una variable estadística, de un conjunto de atributos, materializados en concreto, de los elementos que constituyen un sustrato de investigación (Una Población Objetivo).***
- ***Un dato es un vector puntual (fijo y exacto) que ha adquirido el espacio de atributos de un sustrato de investigación.***
- Es decir existen datos unidimensionales que refieren elementos entendidos únicamente mediante parámetros y datos multidimensionales que permiten concebirlos mediante vectores puntuales. En general en la Estadística Descriptiva aplicada por pedagogía, se asume que los datos son unidimensionales, por lo que cuando hagamos referencia a los datos asumiremos por defecto que son unidimensionales y más bien, una colección ordenada de datos conforma un Vector de Observación.

158 Este término conjuntivo, en lenguaje menos estricto es equivalente al de "Operacionalización de una Variable. El término que usamos, deviene de la Teoría de la Investigación Operativa.

159 Se puede entender un punto como un elemento de un Espacio Euclídeo **n** dimensional.

Se denominan Datos Congruentes a aquellos que son de la misma dimensión y además están definidos en abstracto por las mismas variables. Únicamente los Datos Congruentes se pueden agregar.

BASE DE DATOS

Se denomina Base de Datos, a una colección de datos de la misma dimensión que constituyen el sustrato fáctico de una investigación científica[160].

- Una Matriz n x m en la que sus n filas representan el número de observaciones que se han efectuado (datos) y sus m columnas, la dimensión de cada una de esas observaciones[161].
- Si se prefiere asumir que las observaciones son unidimensionales, correlacionadas entre sí en cada vector lineal, se entenderá una Base de Datos como una colección de (n x m) datos unidimensionales recogidos en una matriz de esa dimensión.

La dimensión "**n**" de la matriz que representa su número de filas, se denomina Dimensión Real de la Base de Datos y la dimensión "m" se denomina Dimensión Teórica, porque coincide con el número de variables mediante las cuales se interpretan los datos. **El producto irreducible e inconmutable de estas dos dimensiones se denomina Dimensión de la Base de Datos.**

Cabe establecer una digresión respecto a las bases de datos, en cuanto estén conformadas por los datos en su representación original o mediante su representación estadística, en el primer caso se denominan Bases de Datos Originales y en el segundo Bases de Datos Estadísticas o simplemente Base de Datos.

$$\underset{(4x2)}{B} = \begin{vmatrix} a_{(1,1)} & a_{(1,2)} \\ a_{(2,1)} & a_{(2,2)} \\ a_{(3,1)} & a_{(3,2)} \\ a_{(4,1)} & a_{(4,2)} \end{vmatrix}$$

En la ilustración se aprecia la Matriz que representa una Base de datos (4 x 2) es decir que contiene cuatro observaciones[162], en la que cada una consiste en el registro de dos atributos. En la interpretación unidimensional de los datos, se puede afirmar que la Base de Datos, contiene 8 observaciones. Se hace evidente bajo esta última perspectiva que la Dimensión Real de la Base de datos es de cuatro y su Dimensión Teórica es de dos.

160 En este contexto se aceptará que al menos la descripción representa una "Investigación Científica".

161 Es fácil apreciar en atención a esta definición que en la matriz que representa la Base de Datos, son conmutables sus filas, pero no son conmutables sus columnas.

162 Cuatro vectores bidimensionales.

FRECUENCIA Y TABLAS DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA

Se denomina frecuencia de un dato al número de veces en las cuales este se hace efectivo (se hace concreto). Si el dato refiere únicamente un atributo (es de una dimensión) la frecuencia es simple, en otro caso, la frecuencia se llama Frecuencia Conjunta. Son posibles de representar mediante tablas las distribuciones de datos simples y las distribuciones de datos bidimensionales.

Una Distribución de Frecuencias Simple es la presentación de un conjunto de datos de una dimensión, mediante una matriz, r x 2 en la cual la primera columna expresa el Campo de Existencia de los datos (la variable mediante la cual son inteligidos) y la segunda las veces en la que cada uno de los valores de la variable (en la fila correspondiente) se ha observado. Se suele afirmar también alternativamente que: **una distribución de frecuencias es la expresión de un conjunto de datos congruentes mediante su significación teórica y su significación fáctica[163].**

En el siguiente gráfico se hace patente una Distribución de Frecuencias, los elementos de su primera columna Ai, indican cada uno de los valores en los cuales puede realizarse la variable y los valores Fi, las veces en los que cada uno de ellos se realiza comúnmente denominada Frecuencia Absoluta.

Variable Estadística	Frecuencia Absoluta
A1	F1
A2	F2
Ai	Fi
Ar	Fr

La suma de los elementos de la segunda columna, representa la Dimensión Material de la Base de Datos de Dimensión Teórica unidimensional;

$$n = \sum_{i=1}^{i=r} F_i$$

El Valor **"r"**, el número de formas diferentes en las que puede hacerse efectiva una variable se denomina **Cardinalidad Teórica de la Variable Estadística[164].**

Una Distribución de Frecuencias Conjunta de Datos Bidimensionales, se corresponde a la Matriz Marginada, Superior e Izquierda que en sus márgenes despliega los Campos de Existencia de las

163 El significado de la variable que les da un contenido abstracto y las veces en las cuales esté se ha hecho concreto.

164 Nótese que el término "Cardinalidad Teórica" no es un sinónimo del significante "Dimensión Teórica".

Variables **X** y **Y** y cuyos elementos indican las veces en las cuales se hacen efectivos los vectores bidimensionales cuyos primeros elementos están constituidos por valores de **X** y los segundos por valores de **Y**; en la línea y en la columna respectivamente.

En el gráfico que prosigue se representa la Distribución de Frecuencias Conjunta Bidimensional de los datos (X,Y). Asumido el campo de existencia de la Variable $X=\{x_1,x_2,\ldots\ldots x_p\}$ y de la Variable $Y=\{y_1,y_2,\ldots y_q\}$.

$$DF(X,Y)=\begin{array}{c|c} & y_1 \quad y_2 \quad \cdots\cdots \quad y_q \\ \begin{array}{c} x_1 \\ \\ \\ x_p \end{array} & \left\|\begin{array}{ccc} f_{(1,1)} & & f_{(1,p)} \\ f_{(2,1)} & f_{(i,j)} & \\ & & \\ f_{(q,1)} & & f_{(p,q)} \end{array}\right\| \end{array}$$

La suma de los elementos de la matriz, es la Dimensión Material de los datos bidimensionales:

$$n=\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=q} f_{(i,j)}$$

El producto aritmético, **p x q,** indica la Cardinalidad Teórica de la Variable Bidimensional. Es el número de puntos en los cuales la variable puede proyectarse a la realidad.

Aunque no pueden realizarse Tablas de Distribución de Frecuencias para Variables Estadísticas de más de dos dimensiones, es posible generalizar los algoritmos de la Dimensión Real y de la Cardinalidad Teórica, para cualquier dimensión vectorial, **h**:

$$n=\sum_{i1=1}^{i1=P1}\sum_{i2=1}^{i2=P2}\sum_{i3=1}^{i3=P3}\cdots\cdots\sum_{ih=1}^{ih=Ph} f_{(i1,i2,i3\ldots\ldots\ldots\ldots ih)}$$

$$r=\Pi_{i=1}^{i=h} Pi$$

OPERACIONES FUNDAMENTALES DE LAS DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS DE LAS OPERACIONES EN GENERAL

Se denomina operación al acto que consiste en interrelacionar los elementos de un conjunto entre si[165] o con los elementos de otro conjunto para lograr un resultado, de acuerdo a la preceptiva de una norma de interrelación. A los elementos que originalmente han intervenido en la operación se les denomina **"Factores de la Operación"** y al resultado se le denomina **"Producto de la Operación".** Si la operación involucra dos factores se denomina binaria, si interrelaciona tres ternaria, etc. y, en general de acuerdo a los factores que intervienen "**n aria".**

165 En este caso se denominan "Leyes de Composición Interna.

Sin pretender desarrollar una teoría de las operaciones se enuncia algunas de las propiedades que les son inherentes y permiten clasificarlas:

1) **CLAUSURA.-** Una operación cumple con la clausura si el Producto de la Operación, pertenece al conjunto de los factores que en ella intervienen.

ILUSTRACIÓN.- En general, en un acto electoral, en el que se decide mediante el voto, el elegible mediante el sufragio es cualquiera que tiene capacidad de ser elector.

La operación es el acto electoral en el que mediante un determinado sistema de elección se elige un representante.

La elección de autoridades universitarias en la que los estudiantes no pueden adquirir esta calidad, respecto al sustrato de estudiantes, es una operación que no cumple la propiedad de la clausura.

$\forall x,y \in A \Leftrightarrow x\Re y = z \,/\, z \in A$ [166]

2) **CONMUTATIVIDAD.-** Una operación es conmutativa cuando el orden en el que se operan sus factores no afecta su producto.

ILUSTRACIÓN.- Cuando se desarrolla una encuesta, para determinar un resultado, el orden de las entrevistas no influye en el resultado, por lo que la operación que consiste en la recolección de entrevistas es conmutativa.

En relación al mismo proceso, la determinación de la Desviación Típica de los atributos de las observaciones no es conmutativa con la determinación de su Media, en vista que el segundo parámetro es una condición para la determinación del primero.

$\forall x,y \in A : x\Re y \equiv y\Re x$ [167]

3) **ASOCIATIVIDAD.-** Es Asociativa cuando para todos los factores ocurre que la operación de uno cualquiera con otro, da un resultado que operativizado con otro a su vez es otro resultado equivalente a aquel que resulta de cualquier otra combinación en la cual se establezca otra forma de agrupamiento.

ILUSTRACIÓN.- La relación entre un grupo de individuos que desarrollan transacciones en un mercado de competencia perfecta es asociativa. Cuando se establece un "cartel"[168], la relación deja de ser asociativa.

166 En términos comunes: La operación de dos elementos cualquiera, x,y, que pertenecen al conjunto A, origina siempre un elemento z, que también pertenece a ese conjunto.

167 Para cualquier par de elementos que pertenecen al conjunto A, ocurre que la operación del elemento **x con el elemento y es equivalente a la operación del elemento y con el elemento x.**

168 Asociación de un grupo de compradores para influir sobre el precio o la cantidad.

$\forall x, y, z \in A : x\Re(y\Re z) \equiv (x\Re y)\Re z$ [169]

4) **EXISTENCIA DE UN ELEMENTO NEUTRO.-** Si en los elementos que constituyen el conjunto que sirve de sustrato a la operación existe uno que operado con cualquier otro elemento, reproduce este último sin ninguna alteración siguiendo las leyes de la operación, este se denomina elemento neutro.

ILUSTRACIÓN.- Un elemento de estilo en un contrato, que no afecta su contenido jurídico es un elemento neutro. En tanto que un elemento de solemnidad es parte esencial del contrato, por lo que no puede considerarse un elemento neutro.

$\forall x \in A : x\Re I = x$ [170]

5) **EXISTENCIA DE UN ELEMENTO INVERSO.-** Si existe un elemento en la operación que operado con cualquiera de los otros origina el elemento Neutro de la operación, se denomina a este Elemento Inverso.

ILUSTRACIÓN.- En una obligación de carácter patrimonial, el pago representa el elemento inverso.

$\forall x \in A : x\Re x^{*} = I$

OPERACIONES BÁSICAS DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS UNIDIMENSIONAL

Las Operaciones Básicas[171] inherentes a una Distribución de Frecuencias Unidimensional son: la Acumulación Total, la Frecuencia Acumulada, la Frecuencia Relativa, la Frecuencia Relativa Acumulada y la Frecuencia Relativa Jerárquica.

ACUMULACIÓN TOTAL.- Consiste en la determinación de la cantidad de datos que cuenta la distribución de frecuencia, es simplemente la suma de las frecuencias de los datos.

$$n = \sum_{i=1}^{i=r} fi$$

En el algoritmo, **r**, representa el número de datos o marcas de clase diferentes en tanto que ***f*,** las veces en las que cada uno de estos valores se hubo producido.

FRECUENCIA ACUMULADA.- Es la operación que consiste en asignar a cada valor de la variable estadística, el número que representa las veces en el cual se produjeron valores inferiores

169 Para cualquiera de tres elementos que pertenecen al conjunto A, se cumple que si operamos el elemento x, con el resultado de la operación del elemento y con el elemento z, este resultado es equivalente al que se produce de operar el resultado previo de la operación del elemento x, con el elemento **y** con el elemento **z**.

170 Para todos los elementos que pertenecen al conjunto A, existe un elemento neutro I de tal modo que su operación con este elemento, reproduce el elemento original.

171 Resulta evidente que el nombre completo es Operaciones Estadísticas Básicas de una Distribución de Frecuencias Unidimensional.

o valores iguales a su frecuencia absoluta. Se obtiene agregando la frecuencia absoluta del valor de la variable a las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores.

$$FAj = \sum_{i=1}^{i=j} f_i$$

En la expresión matemática, FAj representa la frecuencia acumulada del dato "j".

FRECUENCIA RELATIVA.- Es la operación que asigna a cada uno de los valores de la variable, su significación estadística en el total de observaciones se obtiene de dividir su frecuencia acumulada con la Acumulación Total[172].

$$fri = \frac{fi}{n}$$

FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA.- Es la operación mediante la cual a cada valor de la variable se le otorga un número, comprendido en el intervalo [0,1] de modo que represente la significación estadística de los valores iguales o inferiores al valor de la variable.

$$fAj = \frac{\sum_{i=1}^{i=j} f_i}{n}$$

La secuencia de las Frecuencias Acumuladas, muestra la evolución de la variable en su Campo de Existencia.

FRECUENCIA RELATIVA JERÁRQUICA.- Es la operación que otorga a cada valor de la variable, una jerarquía en relación al valor que hubo adquirido la mayor frecuencia absoluta. Se denota por la relación entre la frecuencia del valor de variable dividida entre la frecuencia del valor acaecido más veces.

$$fJj = \frac{fj}{f_{\max imo}}$$

ILUSTRACIÓN.- En atención a la Distribución de Frecuencias de la variable "W" que se expresa mediante la siguiente tabla, desarrollar las Operaciones Básicas:

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS DE W

W	F(w)
2	2
4	5
6	1
8	3
10	2

172 En términos vulgares se denomina Peso Específico de un Valor de la Variable.

Es posible desarrollar todas las Operaciones Básicas de una distribución de frecuencias ampliando la tabla en cuatro columnas.

ILUSTRACIÓN.- En atención a la Distribución de Frecuencias de la variable "W" que se expresa mediante la siguiente tabla, desarrollar las Operaciones Básicas:

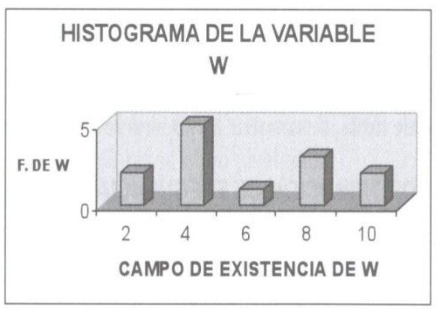
W	f(w)	FA(w)	fr(w)	fA(w)	fG(w)
2	2	2	2/13	2/13	2/5
4	5	7	5/13	7/13	5/5
6	1	8	1/13	8/13	1/5
8	3	11	3/13	11/13	3/5
10	2	13	2/13	13/13	2/5
N =	13				

REPRESENTACIONES GRÁFICAS DE LA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS Y DE SUS OPERACIONES BÁSICAS

Las principales representaciones gráficas son: el Histograma, el Diagrama de Sectores, el Polígono de Evolución de la Variable Estadística y el Diagrama Comparativo.

HISTOGRAMA.- Es la representación en el primer cuadrante del Plano Cartesiano de la Distribución de Frecuencias de una variable mediante rectángulos[173], cuya base representa un valor de la variable y, su altura las veces en las cuales ha ocurrido este valor.

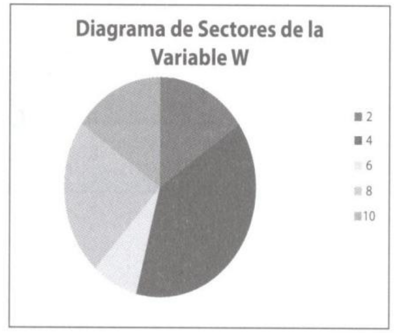
ILUSTRACIÓN.- Mediante el siguiente esquicio se representa el Histograma de la Distribución de Frecuencias de la Variable W, utilizada en la anterior ilustración.



173 En el presente caso se representa mediante paralelepípedos, en un Plano Cartesiano Estilizado, lo que no inpide la equivalencia con la representación gráfica descrita.

DIAGRAMA DE SECTORES.- Es la representación mediante un círculo segmentado de la significación relativa de los valores que adquiere la variable estadística. La superficie de los segmentos es proporcional a la Frecuencia Relativa de los Valores que adquiere la variable.

ILUSTRACIÓN.- Mediante el gráfico que continúa se desarrolla el diagrama de sectores de la variable W.



POLÍGONO DE EVOLUCIÓN DE LA VARIABLE ESTADÍSTICA.- Indica mediante un gráfico lineal construido en el primer cuadrante del plano cartesiano, cuyo eje de abscisas representa el Campo de Existencia de la Variable y su Eje de ordenadas su frecuencia relativa, el ritmo de crecimiento de la Variable Estadística.

ILUSTRACIÓN.- En el siguiente gráfico se despliega el polígono de evolución de la variable W.

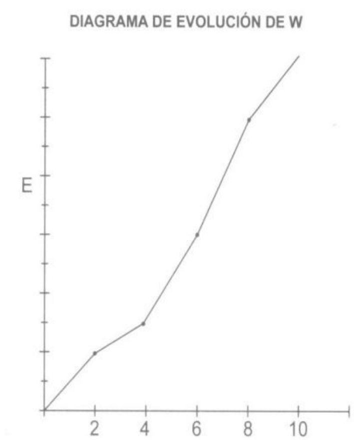
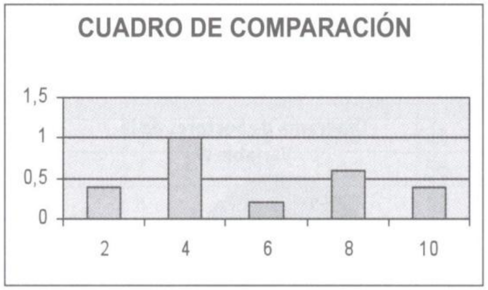


DIAGRAMA DE COMPARACIÓN DE LA JERARQUÍA.- Representa en el primer cuadrante del plano cartesiano mediante un diagrama de barras, cuan importante es en relación al más importante valor de la variable un valor específico.

ILUSTRACIÓN.- El esquicio que prosigue muestra el Cuadro Comparativo de la Jerarquía en la Variable W.



ENCUESTA

Se llama encuesta al proceso mediante el cual se obtiene siguiendo el procedimiento estadístico una muestra de una población objetivo.

El término regulado "muestra", denota que está es un conjunto de datos representativos de una población, logrados mediante una técnica adecuada que pudiera ser:

a) **MUESTREO ALEATORIO SIMPLE.-** Aquella en la que todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

b) **MUESTREO ALEATORIO POR CONGLOMERADOS.-** Se escinde la población en varios subconjuntos, que la representan por reproducir su estructura. Luego se elige al azar (por un sorteo en el que todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos) un grupo de ellos.

c) **MUESTREO ALEATORIO POR ESTRATOS.-** Se particiona la población en clases y de acuerdo a su tamaño se eligen de cada clase elementos al azar como en el caso anterior, que reunidos constituyen la muestra.

Capítulo Cuarto

CONCEPTO Y DEFINICIÓN DE UN ESTADÍGRAFO

MUESTRA Y POBLACIÓN OBJETIVO

Anteriormente se esbozaron estos conceptos de trascendental importancia en la teoría de la estadística, que ahora se los erige con la suficiente profundidad conceptual, en el capítulo décimo noveno se hará, respecto a ellos, una exposición matemática.

Se parte de que la intención de toda investigación científica, es el conocimiento de una población objetivo, sobre la base de una muestra[174]. En realidad el objeto de una investigación científica, es la propia población objetivo, entendida como un colectivo de objetos científicos, es decir Objetos Reales limitados para su comprensión, a un número determinado de atributos. Los textos elementales de metódica de la investigación no subrayan esta ley fuerte de toda investigación científica positiva, confundiendo la delimitación de la investigación con la identificación de la población objetivo.

POBLACIÓN OBJETIVO

Definición del término:

Se define la población objetivo en un sentido preciso, como una reunión de elementos reales, interrelacionados bajo Razones Funcionales de Conjunción y, que son entendidos por el intelecto científico, mediante sus **atributos manifiestos**, expresados en datos estadísticos.

174 Que en un extremo pudiera ser la propia población objetivo.

Es decir son elementos de un sistema[175] que únicamente en el caso más simple admiten como Razón Funcional de Conjunción, una mera yuxtaposición[176].

Hace notar Azorin Poch[177] a pesar que la "Población Objetivo", también se la denomina "Universo", existe entre esos términos una diferencia, debido a que se indica con el segundo simplemente un conjunto de elementos, seres u objetos y con el primero un conjunto de números obtenidos midiendo o contando cierta característica de los mismos. El "Universo" es la población en su sentido original; la población objetivo es la población original, luego de haber sido reducida en el entendimiento de sus componentes, a un conjunto limitado de determinaciones que facilitan su comprensión y la elucidación de sus Razones Funcionales de Conjunción.

La conceptualización previa de la Población Objetivo, en el entendido de que es conocida en un grado inferior al que se intenta lograr mediante la investigación científica o de otro modo entendida en menos determinaciones de las que se pretende conseguir, es la base sobre la que se construye toda nueva investigación e incluso una Ciencia[178]. Por lo que el prolegómeno de toda investigación científica debe hacer explícita la conceptualización actual[179] de la población objetivo, además de proponer su modificación prevista, postulada o deseada a la conclusión de la investigación.

ILUSTRACIÓN.- Si se quiere estudiar a las instituciones políticas de un estado determinado: La población objetivo es la reunión de todas esas instituciones que se interrelacionan bajo distintos nexos políticos; cumplen juntas un conjunto de funciones y no están reunidas únicamente por tener una o más características comunes[180].

CARACTERÍSTICAS CIENTÍFICAS DE UNA POBLACIÓN OBJETIVO

Se denomina Características Científicas o Características Estadísticas de una Población Objetivo, al conjunto de Vectores Puntuales que permiten entenderla de un modo objetivo[181]. Es decir que para cualquier persona suficientemente provista de conocimientos técnicos, tendrá el mismo

175 Conjunto de unidades autonómicas, interrelacionadas entre sí para el cumplimiento de una o varias funciones jerárquicamente ordenadas.

176 El simple agrupamiento de elementos, sin importar una específica forma de interrelación en atención al cumplimiento de una función.

177 En su conocido CURSO DE MUESTREO Y APLICACIONES.

178 En el DISCURSO DEL MÉTODO, **Renato Descartes** propone que: "para llegar a la verdad, hay que reconstruir desde los cimientos todos los sistemas del saber". Ese extremo caso no es considerado en el común de las investigaciones científicas.

179 En términos vulgares, el "estado del arte" del que parte la investigación.

180 Vectores cuyos elementos son valores concretos, parámetros.

181 En realidad la población de un estudio científico, se la puede entender como el objetivo al que apunta la investigación además de que este se puede entender de forma objetiva, es decir prescindiendo de la apreciación particular de quien la desarrolla, una vez conocido su objeto, su método, su intención y estando suficientemente acordado un lenguaje para comunicar sus determinaciones.

significado. Es un conjunto de parámetros, debidamente ordenados que resume de forma relevante las cualidades de los elementos que conforman la población.

Estas características, tienen distinto grado según involucren interrelaciones monarias, (referidas a una variable), Binarias —referidas a dos variables, como en el caso del Coeficiente de Correlación— y generalizando de grados mayores.

CARACTERÍSTICAS ESTADÍSTICAS PRIMARIAS DE UNA POBLACIÓN OBJETIVO[182]

Las Características Estadísticas Primarias o estáticas de una Población Objetivo, denominadas también Características Objetivas Fundamentales de la Población de Estudio, conocidas o que se intentan inferir mediante una muestra son:

a) **El número de elementos que la conforman**. Tamaño poblacional, que puede ser finito o infinito, conocido o desconocido. Cuando el número de elementos de una población es infinito, la población se denomina Población Infinita, en oposición cuando lo es Población Finita. El segundo aspecto permite clasificar las poblaciones en Definidas e Indefinidas.

b) **Las Variables que Circunscriben su Campo de Existencia**. Las que permiten precisarla como un objeto científico, dotándole además del atributo de dimensión.

c) **Los Minorantes y Mayorantes,** en pares ordenados de su campo de existencia, respecto a los atributos que la definen, que tiene la misma dimensión que el Objeto Científico que la representa. Estas son las cotas inferiores y superiores de las variables que definen la población objetivo. Estos mayorantes y minorantes se denominan teóricos o previstos, en virtud de que aunque no se ha probado a priori su existencia, existe un fundamento para su determinación.

d) **El Minorante y el Mayorante, Teóricos del atributo principal, inherente a la Población Objetivo,** este atributo generalmente permite mediante su segmentación establecer su Estructura de Clases.

e) **Su Estructura de Clases.**

f) **Sus Estadígrafos de Tendencia Central.**

g) **Sus Estadígrafos de Dispersión, Absolutos y Relativos.**

h) **Sus Estadígrafos de Sesgo.**

i) **Sus Estadígrafos de Curtosis.**

182 Las características de Orden Mayor de una población objetivo, que no son estudiadas en esta parte, permiten conocer las formas en las cuales se relacionan entre sí los elementos que esta contiene, por lo que también se denominan, **Características Funcionales,** en oposición a las primarias que también se denominan **Estructurales.**

ESTRUCTURA DE CLASES DE UNA POBLACIÓN OBJETIVO

Una clase o estrato es un grupo de elementos, de una población que comparte al menos una característica común.

Si los elementos de una población objetivo, se los divide de modo que:

a) Todos los elementos de la población pueden ser asignados a una de las partes en las que se ha seccionado la población.

b) Cada una de las partes de la división no comparta elementos con otra parte diferente de ella. **Las partes entre sí, sean disjuntas.**

c) La reunión de las partes reproduzca de forma exacta los elementos de la población.

Se establece en la Población Objetivo una **Estructura de Clases**[183]; llamada también **Ley de Estratificación Poblacional**.

Objetivamente la estructura de clases de una población, de **k** clases, está representada por **k** Coeficientes de Estratificación mediante su tamaño, que puede variar de 0 a 1:

$$\Phi_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^{j=k} f_j}$$

En los que cada uno mediante su tamaño, que puede variar de 0 a 1 denota la **importancia estadística**[184] **de cada clase,** mediante la división del número de sus componentes f_i entre el total de elementos de la población**.** Obviamente se cumple:

$$1 = \sum_{i=1}^{l=k} \Phi_i$$

MUESTRA

Una muestra es el instrumento mediante el cual se logra la introspección de una Población Objetivo o se toma decisiones respecto a ella. En definitiva al investigador no le interesa como una finalidad, el conocimiento de la muestra sino la cualidad de que mediante ella se puedan inferir características poblacionales o establecer docimasias respecto a determinadas características poblacionales.

Una muestra es una porción de la población que sirve para inferir todas o algunas de sus Características Estadísticas o para probar hipótesis que se erigen respecto a la población, con un determinado grado de confianza.

183 Una Partición Poblacional.

184 Importancia fáctica.

Esta porción poblacional está integrada por un conjunto de elementos de la población elegidos de modo conveniente[185]; mediante métodos aleatorios o por la experticia de quien tiene suficiente conocimiento de la población objetivo.

CARACTERÍSTICAS DE UNA MUESTRA

De forma análoga a una Población, se le atribuyen a una muestra Características Estadísticas, entre las principales se tiene:

a) **El tamaño de la muestra. Absoluto** en cuanto expresa el número de elementos que contiene y **Relativo**, cuando —en el caso de las poblaciones finitas tamaño conocido— se puede representar el tamaño de la muestra como una fracción propia del correspondiente de la población.

b) **Las variables que definen el campo de existencia** de los elementos que contiene. Resulta elemental que el campo de existencia de la muestra es un subespacio del campo de existencia de la población[186].

c) **El conjunto de elementos binarios, conformado por los pares de minorantes y mayorantes,** de cada una de las variables que constituyen su campo de existencia, efectivamente convertidos en datos. Estos Minorantes y Mayorantes se reputan como Reales, en virtud a que se han efectivizado en los datos que contiene la muestra.

d) **El Mayorante y Minorante Reales del atributo principal** de sus elementos que la integran.

e) **Su Estructura de Clases,** que se sujeta estrictamente a la estructura de clases propuesta para la población. Se llama **Afijación** de la Muestra, al reparto de sus **n** elementos entre los k estratos que integran la población.

f) **Sus Estadígrafos de Tendencia Central.**

g) **Sus Estadígrafos de Dispersión, Absolutos y Relativos.**

h) **Sus Estadígrafos de Sesgo.**

i) **Sus Estadígrafos de Curtosis.**

GRADO DE CONFIANZA Y ERROR DE LA MUESTRA

El Grado o Nivel de Confianza de una muestra, es la probabilidad de que mediante ella, desarrollando las operaciones pertinentes, se infiera el verdadero valor de una característica

185 Los métodos de selección de los elementos de la muestra, son estudiados en la teoría del muestreo.

186 Los Elementos de la muestra, mediante combinaciones lineales pueden generar todos los elementos de la población objetivo.

poblacional o se tome una decisión correcta respecto a un valor hipotético enunciado respecto a los parámetros de la población objetivo.

El error de una muestra, es la diferencia entre el resultado de una operación muestral pertinente, que infiere el valor de un parámetro poblacional o permite tomar una decisión respecto al mismo, con el verdadero valor de la población, que se intenta estimar o respecto al cual se toma la decisión, según sea el caso.

Notoriamente se observa, que a medida que en una investigación científica basada en una muestra, se intenta una mayor confianza, se debe aceptar un mayor nivel del error y viceversa.

ILUSTRACIÓN[187]

Se hace un estudio estadístico de todas las madres que gozan del Seguro SUMI, que son 244.000, que deberá considerar su edad, el número de hijos, su estado civil y si han sufrido violencia doméstica. Mediante el estudio de 140 mujeres. Caracterizar la población y la muestra.

1) **LA POBLACIÓN REAL,** son todas las madres inscritas en el SUMI, con todas sus características, naturales y jurídicas; las que se han señalado en el enunciado, edad, número de hijos, estado civil, si han sufrido violencia doméstica, además de muchas otras como la región de la que proceden, su peso, su talla, color de ojos, si padecen alguna enfermedad grave, si han tenido abortos, Etc. Como se puede apreciar a cada madre, se puede atribuir una infinitud de características que por su extensión la harían incomprensibles. **El Objeto Real de Investigación,** es cada una de las madres, con todas sus características.

2) **LA POBLACIÓN OBJETIVO,** son todas las madres, entendidas únicamente mediante cuatro características, su edad, su número de hijos, su estado civil y si han sufrido violencia doméstica. **El Objeto Científico de la Investigación,** es cada madre, entendida únicamente mediante las cuatro características.

3) **LA POBLACIÓN REAL ES FINITA Y ADEMÁS DEFINIDA,** porque se sabe que existe un número limitado de madres que gozan del SUMI, además de que en los registros de este seguro se puede establecer con exactitud cuántas son las beneficiarias en este caso, 244.000.

4) **LA DIMENSIÓN DEL OBJETO CIENTÍFICO ES CUATERNARIA,** en atención al número de variables que lo circunscriben. Por lo que cada observación respecto al objeto científico, sujeto a investigación será un vector de cuatro dimensiones. Cada dato es un punto cuatridimensional, que se refiere a una madre.

5) **NO EXISTE UNA ESTRUCTURA DE CLASES,** aunque puede establecerse asumiendo que la variable principal es la edad y podría establecerse el criterio de que son madres jóvenes quienes no han cumplido los 25 años y madres adultas quienes lo han hecho. En el caso de

187 Este ejemplo sólo tiene fines pedagógicos y pudiera encontrarse que es un tanto irreal, en tanto que el número de hijos, la edad y el estado civil, son datos que figuran en el propio registro SUMI, sin embargo es absolutamente relevante la última característica, el sufrir o no violencia doméstica.

que no se tengan los registros exactos, sería admisible la hipótesis de que 1/3 de las madres son jóvenes y en este caso la **Estructura de la Población Propuesta,** está representada por **los Coeficientes de Estratificación**: $\Phi_1 = 1/3 y \Phi_2 = 2/3$. Para **k=2 Clases Poblacionales.**

6) **LA MUESTRA,** son las 140 madres sujetas al estudio científico de las que interesan únicamente cuatro características. Si se establece una **Estructura de Clases en la Muestra,** deberá ser en atención a la edad y no otro atributo.

7) **LOS RANGOS TEÓRICOS DE LAS VARIABLES SON[188]:** Para la edad,**(13, 50)** se presupone que no puede existir una madre menor de 13 años ni una mayor de cincuenta. Para el número de hijos, **(0, 12)** se asume que no puede haber madres con más de 12 hijos. Las otras variables son cualitativas y requieren una previa Transformación Real, por ejemplo, a las solteras se les asignará biunívocamente el 1, a las casadas el 2, a las divorciadas el 3 y a las viudas el 4. En el otro caso al atributo de no haber sufrido violencia, se lo calificará con 0 y al de haber sufrido violencia con 1. Los rangos respecto al estado civil y la violencia doméstica serán respectivamente, **(1, 4) y (0,1)** y deberán ser entendidos bajo los patrones de transformación que se han hecho explícitos. Entonces los límites de existencia del Espacio de Definición del Objeto Científico pueden resumirse en el conjunto de elementos binarios:

$$\{(\mathbf{13, 50}), (\mathbf{1, 12}), (\mathbf{1, 4}), (\mathbf{0, 1})\}.$$

8) **LOS RANGOS REALES (MUESTRALES),** en el entendido de que son los datos que efectivamente acaecieron en la muestra, como extremos de las variables que definen el Objeto Científico son los elementos binarios del conjunto:

$$\{(\mathbf{16, 38}), (\mathbf{0, 4}), (\mathbf{1, 4}), (\mathbf{0, 1})\}$$

Quiere decir que en la muestra la mujer de menor edad fue de 16 años, la de mayor de 38. Que se encontraron mujeres que anteriormente no dieron a luz y otras que como máximo tuvieron 4 hijos. Que se encontraron mujeres de todos los estados civiles. Que se observaron en la muestra mujeres que no sufrieron violencia doméstica y otras que la padecieron.

9) **LA ESTRUCTURA DE CLASES DE LA MUESTRA,** que en su sentido debe corresponderse a la Estructura de Clases de la Población Objetivo, indica que en la muestra se encontraron 3/5 de mujeres jóvenes y por complemento entonces 2/5 de mujeres maduras, difiere de la Estructura de la Población porque sus **Coeficientes de Estratificación** son diferentes.

188 También representan hipótesis respecto a las variables.

CENSO

Se denomina Censo a la Descripción Exhaustiva de una Población Objetivo, sólo en este caso, existe una identidad de la Población Objetivo con la Muestra y por ello coinciden el Tamaño Muestral con el Tamaño Poblacional.

El Censo es la introspección total de la población objetivo, en tanto que se ha reducido a datos todos los elementos que la integran.

El Censo es el instrumento estadístico que determina el mayor grado de verosimilitud en el conocimiento de una Población Real, definido un sistema de variables en las que esta se proyecta[189] a una Población Objetivo.

ESTRUCTURA DE CLASES DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Por analogía a lo expresado anteriormente y con efecto práctico en el caso de que una distribución de frecuencia sea extensiva —tenga numerosos datos— Una serie de datos se convierte en una estructura de clases cuando se la particiona en segmentos disjuntos, denominados Intervalos de Clase, cuya unión representa la totalidad del campo de definición de la serie. En este caso, los elementos de la nueva variable estadística, subconjuntos del campo general de definición de la variable original, **son segmentos acotados por un minorante y un mayorante, denominados respectivamente, Límite Inferior y Límite Superior del intervalo de clase.**

DEFINICIÓN DEL TÉRMINO ESTADÍGRAFO

Se define denotativamente por Estadígrafo o Medida Estadística, al resultado[190] con calidad descriptiva de una operación matemática —estadística— que tiene por elementos a los datos de una Población Objetivo —cuando son conocidos— o los de una Muestra; los factores de la operación son los elementos de una Base de Datos.

Connotativamente un Estadígrafo, es un valor que nos permite conocer objetivamente una Población Objetivo o las características principales de una muestra.

Es un Vector Punto que indica el comportamiento estadístico de un colectivo de datos, reunidos en una Distribución de Frecuencias.

Los estadígrafos principales son: Posición o Tendencia Central, de Dispersión, Absoluta y Relativa, de Sesgo y de Curtosis o Apuntamiento.

189 Recuérdese que la Dimensión Teórica de la Población Objetivo es el número de variables mediante las cuales describe la Población Real.

190 Un parámetro o un conjunto de parámetros, denominado "Vector Puntual".

ESTADÍGRAFOS DE TENDENCIA CENTRAL

Los Estadígrafos de Tendencia Central llamados también de Posición, son vectores punto que representan a los datos reunidos en una Distribución de Frecuencia. En atención a que indican el punto al cual convergen los datos se denominan también, Medidas de Centralización o Convergencia.

Existen varias operaciones estadísticas que tienen por factores los datos de una población, mediante las cuales se puede obtener como resultado un Estadígrafo de Tendencia Central, en realidad cada una de ellas representa **un Criterio de Centralización**[191], el más adecuado de ellos se determina en atención al contenido de los datos.

ESTADÍGRAFOS DE DISPERSIÓN

Los estadígrafos de Dispersión indican cuán semejantes son los datos que contiene una Distribución de Frecuencias. Son una medida de la similitud de las observaciones poblacionales o muestrales. En una distribución multivariada, indican la semejanza de los datos que ha recogido cada una de las variables que la integran.

Si miden la dispersión con prescindencia de cualquier otro parámetro poblacional o muestral, según el caso, se denominan Estadígrafos de Dispersión Absoluta. Si lo hacen en referencia a otro parámetro, se denominan Estadígrafos de Dispersión Relativa.

ESTADÍGRAFOS DE SESGO

Los Estadígrafos de Sesgo indican la calidad y el grado en el cual los datos reunidos en una distribución de frecuencias son simétricos o disimétricos respecto a un parámetro de la indicada. La distribución tiene sesgo negativo, si la mayoría de los datos han acaecido en valores inferiores a ese parámetro. Es positivo, si la mayoría lo ha hecho en valores superiores. Y es simétrica, si existe un equilibrio entre los valores menores y los mayores en relación a ese parámetro. Que generalmente es un Estadígrafo de Tendencia Central.

ESTADÍGRAFOS DE CURTOSIS

Los Estadígrafos de Curtosis indican si los datos de una Distribución de Frecuencias generan un histograma aplanado, parecido o puntiagudo, respecto al esquicio de la distribución normal típica. En el caso de que el gráfico generado sea aplanado, la distribución se denomina Platicúrtica, si es parecido al dibujo de la Normal Típica se designa Mesocúrtica y si es puntiagudo se llama Leptocúrtica.

191 Se estudiará con más detalle los estadígrafos en el siguiente capítulo.

APLICACIÓN EN LA CIENCIA POLÍTICA

INTERPRETACIÓN DE UN SISTEMA ELECTORAL

Tomando en cuenta, de que una de las labores corrientes del politólogo es la interpretación de un sistema electoral, se desarrollará de forma sucesiva en el presente texto, la interpretación de un sistema electoral aplicando las categorías que se explanen, para lo cual se empezará definiendo un Sistema Electoral, y dentro de él la significación de la Población Objetivo y la Muestra, el resultado de una elección.

SISTEMA ELECTORAL

Un Sistema Electoral es la parte más importante de un Orden Político Democrático[192], que consiste en la concatenación de Instituciones Electorales, Actores Electorales y Normas Electorales, para dotar de un gobierno al pueblo[193].

Un Sistema Electoral es el instrumento mediante el cual en un Orden Democrático, en sujeción estricta a las normas, el pueblo (o una población) expresa la voluntad de otorgar mandato en personas específicas, encomendando a esas autoridades[194] el ejercicio de las funciones públicas más importantes.

ACTO ELECTORAL

Se entiende por Acto Electoral al conjunto de procedimientos mediante los cuales, mediante una elección, se hace una introspección de la voluntad de una población, respecto a su preferencia por un conjunto de alternativas electorales.

En cuanto se determine una preferencia por mayoría o se elija un cuerpo colegiado por **afijación proporcional,** las elecciones se clasifican en: elecciones por mayoría y en elecciones por proporción. Las primeras, considerando que la variable representa las distintas alternativas que se elije son determinadas por la Moda, y las segundas intentando hacer coincidir la Estructura de la Muestra —los datos encontrados en la elección— con la estructura del cuerpo colegiado a elegirse.

192 Por lo que puede afirmarse que un Sistema Electoral es un subsistema de un Orden Político Democrático, en atención a que desarrolla una función específica e identificable.

193 Se entiende al pueblo como un colectivo indisoluble, que solamente se expresa en una elección nacional, en concordancia con la **"indivisibilidad de la soberanía."** Así se debe decir, el pueblo boliviano y la población de Santa Cruz.

194 La soberanía sólo puede delegarse originalmente del pueblo a los gobernantes al fundarse el Estado y reflejarse en una Constitución Política o en una elección de autoridades, (en este caso sólo con la finalidad de determinarlas con especificidad) y a partir de esta delegación no puede existir ninguna otra. Ese es el contexto en el que se entiende en la teoría del Estado la delegación de la soberanía.

En el contexto que desarrollamos, se entenderá por elección al conjunto de procedimientos, que permiten inferir la voluntad de una Población Objetivo, que se traduce en la determinación de un mandatario o un cuerpo de autoridades colegiadas, mediante los datos encontrados en una elección, que se asimila a una muestra. **El conjunto de personas que sufraga efectivamente es una muestra de la Población Objetivo en la que se halla residenciada la voluntad originaria, la soberanía de decidir libremente un mandatario.**

Los Electores Eficaces son aquellos que expresan de forma positiva su preferencia electoral emitiendo un voto que efectivamente es computado por las autoridades electorales como la selección de una alternativa, estos electores representan a toda la población y, por tanto, también a los miembros de la población que por el orden natural, no pueden expresar una voluntad eficiente —**Abstención Natural, o Abstención Absoluta de Primer Orden** de Menores e Interdictos, a los ciudadanos que no se inscriben para participar en un acto electoral— **Abstención Absoluta de Segundo Orden** cuando es voluntaria y **Abstención Relativa de Primer Orden** cuando es involuntaria; a las personas con derechos ciudadanos pasivos que habiéndose inscrito, no acuden al sufragio —**Abstención Absoluta de Tercer Orden**— cuando su ausencia es voluntaria y **Abstención Relativa de Segundo Orden** cuando es involuntaria; a quienes nulifican el voto de Forma Voluntaria **-Abstención Absoluta de Cuarto Orden-** a los que lo hacen por accidente —**Abstención Relativa de Tercer Orden**— además a las personas que votan en blanco, delegando a quienes votan de forma válida su decisión —**Abstención Relativa de Cuarto Orden**—[195].

En el sistema de elección proporcional, se intenta **reconstruir la Estructura de Clases de una Población Objetivo**, la cual está conformada por todos los seres humanos que habitan el territorio en el cual se efectúa la elección[196]. Particionados en virtud de los programas políticos que esgrimen las fuerzas políticas que participan en la justa, **cada partido político, está representado por un valor de la variable política y sus votos indican su frecuencia absoluta.**

Al ser la preferencia política una variable cualitativa, previamente se debe realizar su **Conversión Real,** eligiendo un adecuado **Patrón de Conversión,** del que luego no podrá prescindirse a efectos de la interpretación de los **Estadígrafos de la Muestra** (Los Resultados de la Elección) y de toda inferencia que se realice, respecto a las Características Objetivas de la **Población Objetivo** —El Sustrato Poblacional—. **La Conversión Real de Variables que se ha mencionado, en el caso específico, se denomina "Espectro Político". Un**

195 **La Teoría General de la Abstención Electoral** ha sido desarrollada como una contribución a la Teoría Universal de la Ciencia Política por el autor de este libro y el Lic. Johnny Villarroel Tordoya. El libro referido es texto aprobado por el Consejo de la Carrera.

196 Entiéndase Territorio en un sentido estricto.

Espectro Político, es un conjunto ordenado de ideologías políticas mediante un Patrón de Ordenación[197].

El Patrón de Ordenación Referido, de ser un simple Orden de Primer Grado, se convierte en una **Gradiente de Ordenación Política**, cuando una vez producido sin alterar el lugar que ocupan sus elementos, se lo reestructura en atención a las distintas diferencias que existen entre ellos. Así en la transformación a fuerzas políticas semejantes les corresponderán valores próximos y a fuerzas políticas diferentes, valores distantes[198].

El Espectro Político descrito y la correspondencia de cada una de las ideologías políticas que lo integran con su respectiva votación, se denomina Campo Político[199]. Definido de otro modo, es la reunión de un conjunto de fuerzas políticas que interactúan entre sí.

La significación de los distintos estadígrafos que se han detallado en la descripción del Campo Político, será objeto de estudio en las aplicaciones políticas a desarrollarse en las lecciones siguientes.

197 El Patrón de Ordenación puede corresponderse a varios criterios. Más adelante se desarrollarán aplicaciones concretas.

198 El grado de proximidad en un Orden Transformado (expresado en Términos Numéricos) es la diferencia entre dos valores, dividida entre la Amplitud del Rango en el cual se definen las Ideologías Políticas.

199 Por su analogía a un Campo de Fuerzas Físicas.

Capítulo Quinto

ESTADÍGRAFOS DE POSICIÓN

Los Estadígrafos de Posición más importantes en atención a su aplicación en la Ciencia Política son: la Media Aritmética, la Mediana, la Moda y la Media Geométrica.

MEDIA ARITMÉTICA

Se define la Media Aritmética, como el resultado de la operación estadística que consiste en la suma de los datos[200] contenidos en una distribución de frecuencias, dividida entre el total de datos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} x_i f_i}{n}$$

Evidentemente se aprecia que en la distribución de frecuencias existen "k" clases de datos.

En el caso de datos de dimensión "m" la Media Aritmética está denotada por:

$$\vec{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} (x1_i, x2_i, x3_i .... xm) f_i}{n}$$

PROPIEDADES DE LA MEDIA

1) **Propiedad de Pertenencia Estadística[201] Amplia:** La Media Aritmética de un conjunto de datos, se encuentra comprendida entre el Minorante y el Mayorante del conjunto de datos, es decir dentro del Campo de Existencia de los datos que ordena la Distribución de

200 Escalares o Vectoriales.

201 Esta propiedad es inherente a todos los Estadígrafos de Tendencia Central, por lo que en el caso de los otros, se la tendrá por enunciada. **La Pertenencia Estadística Estricta Amplia, difiere de la Pertenencia Estadística Estricta, en que en la última, el Estadígrafo de Tendencia Central es un dato de los que conforman la serie.**

Frecuencias. No implica esta propiedad que en general opera en la media la Propiedad de Clausura Estadística[202].

$$Minorante \leq \bar{x} \leq Mayorante$$

De forma sencilla puede enunciarse en el caso de que los datos sean multidimensionales que la media se encuentra en un punto interior del campo de existencia de la variable vectorial que representa los datos.

2) **PROPIEDAD DE EXISTENCIA ABSOLUTA Y UNICIDAD:** Toda serie de datos, necesariamente tiene una Media Aritmética y además esta es única.

3) **PONDERACIÓN ASIMÉTRICA:** La ponderación (importancia) que se le otorga a cada dato en la Media Aritmética, considerándolo como una unidad de información es x/n por lo que tienen mayor ponderación en su determinación los datos mayores.

4) **NULIDAD DE LA SUMA DE LOS DESVÍOS:** La suma de los desvíos de los datos contenidos en una Distribución de Frecuencias respecto a su Media Aritmética, es nula. Y esto acontece únicamente con la Media Aritmética y no con otro valor.

$$\sum_{i=1}^{i=k}(x_i-\bar{x})f_i=0$$

5) **TRASLATIVIDAD:** La Media Aritmética de los datos pertenecientes a una Distribución de Frecuencias es igual a cualquier número arbitrario, más la Media Aritmética de los desvíos con respecto al número.

$$\forall z \in R : \bar{x} = z + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k}(x_i - z)f_i$$

6) **MINIMALIDAD DE LA SUMA DE LOS DESVÍOS AL CUADRADO:** La Suma de los desvíos al cuadrado de los datos de una serie estadística, respecto a un parámetro cualquiera es mínima si este parámetro es la Media Aritmética.

$$si\ p=\bar{x} \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=k}(x_i-p)^2 f_i\ es\ mínima$$

7) **AMPLIFICACIÓN:** La Media Aritmética de una serie de datos a cada uno de los cuales se les multiplica por una constante, es igual a la constante, multiplicada por la Media Aritmética de los datos originales (sin que hubiesen sido multiplicados por la constante).

202 Que se la describirá en este mismo capítulo más adelante.

$$si: y_i = cx_i \Rightarrow \bar{y}_i = c\bar{x}_i$$

$$c\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} cx_i}{n}$$

8) **ADITIVIDAD:** La Media Aritmética de una serie de datos a cada uno de los cuales se les suma una constante es igual a la Media Aritmética de la serie original más la constante.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=k}(x_i+c)f_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}x_i f_i + c$$

MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Cuando a los datos de una serie estadística, se les asigna una diferente ponderación. Se asume que cada dato tiene la importancia estadística ψ_i, la Media Aritmética Ponderada de la serie es:

$$\ddot{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k}\psi_i x_i f_i}{\sum_{i=1}^{i=k}\psi_i f_i}$$

MEDIANA

La mediana ME(x) es el estadígrafo de tendencia central de una serie estadística que se determina encontrando el dato central, de los datos ordenados en forma creciente, si la serie tiene un número impar de elementos y el promedio de los dos datos centrales, si la serie tiene un número par de datos.

En el caso que los datos estén agrupados en clases y especialmente si ellas tuviesen un ancho distinto, la mediana no es la marca de clase del intervalo que la contiene, sino se la encuentra aplicando la siguiente expresión:

$$ME(x) = m_{ME} + s = m_{ME} + \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{i=f\,anterior} f_i}{f_{Frecuencia\,de\,la\,Clase\,Mediana}}\right)t$$

En ella la mediana ME(x), es igual al minorante, $\mathbf{m}_{\mathbf{ME}}$, de la clase que la contiene, más un segmento **S**, el cual resulta de dividir el número de elementos que en el segmento permiten alcanzar exactamente la mitad de los elementos que contiene la serie, **n/2**, (cuantos elementos faltan para alcanzar n/2) sobre el total de elementos de la clase que contiene la mediana[203], por el ancho **t,** de la clase poseedora del elemento medio.

$$\left(\frac{\frac{n}{2}-\sum_{i=1}^{i=f\,anterior} f_i}{f_{Frecuencia\,de\,la\,Clase\,Mediana}}\right)t$$

Esta relación de frecuencias, —que aparece entre paréntesis— es un número puro que representa la fracción de elementos que siendo inferiores al medio, están en el intervalo de la mediana, el operador **t,** convierte a la fracción a las unidades en las cuales están expresados los datos. Por lo que la mediana se logra mediante una interpolación lineal.

En una Distribución de Frecuencias, se encuentra la mediana observando la columna que expresa la Frecuencia Relativa Acumulada. La Mediana está en el intervalo cuya frecuencia relativa acumulada, supera por primera vez 0,5.

Si la Frecuencia Relativa acumulada es exactamente igual a 0,5, la Mediana es el minorante del intervalo. En el caso de que los intervalos sean representados por sus Marcas de Clase y sean del mismo tamaño, la mediana será el promedio de las dos marcas de clase.

PROPIEDADES DE LA MEDIANA

1) **PROPIEDAD DE SIMETRÍA GRÁFICA.-** Consiste en que si se construye un histograma, la línea proyectada del eje de las abscisas dividirá este en dos superficies iguales.
2) **PROPIEDAD DE REPRESENTACIÓN EQUIPOLENTE.-** La variación de los datos extremos de una serie estadística no afecta su mediana, si ese cambio no incide en el Orden Determinativo de la serie. Precisamente, existe un cambio en el Orden Determinativo de una serie, cuando se afecta su mediana[204].
3) **PROPIEDAD DE ACOTACIÓN BINARIA.-** La Mediana es el parámetro que de forma natural divide la serie en dos mitades: la inferior y la superior. Si se diera en un dato que pertenece a ambas, para establecer una estructura de clases —inferior y superior— se debe elegir a qué clase este dato se quiere hacer pertenecer —Asignación Arbitraria del dato Mediano—[205].
4) **PROPIEDAD DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.-** Toda serie estadística tiene su Mediana y esta es única.

203 La Frecuencia Acumulada hasta el minorante de la clase que contiene la mediana está representada por la sumatoria que aparece en la fórmula ***f* Anterior**, significa la frecuencia de la clase anterior a la correspondiente de la mediana.

204 Si se altera el valor de algunos datos de una serie estadística y este cambio no afecta el valor de la mediana, entonces la serie no siente afectado su orden determinativo.

205 Este criterio, tiene alta significación en la Ciencia Política. De forma evidente, la partición respecto al número de sus elementos en este caso es asimétrica.

OTROS PUNTOS CARACTERÍSTICOS DE LA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS OBTENIDOS POR ANALOGÍA A LA DEFINICIÓN DE LA MEDIANA

Así como la mediana sirve para dividir los datos de una distribución de frecuencias en **dos** porciones del mismo tamaño, se pueden definir Estadígrafos que sirven para dividirla en otro número relevante de porciones. Las divisiones más comunes son en cuatro y en cien, denominándose a los primeros cuartíles y a los segundos percentiles. Sin embargo, como en la Ciencia Política es importante la división que implique la determinación de los 2/3, se empezará a definir los terciles.

TERCILES.- Los dos terciles de los datos de una distribución de frecuencias, son parámetros que permiten dividir los datos ordenados en orden ascendente en tres partes iguales. El primero se denomina Tercil Inferior y el segundo Tercil Superior. El Tercil Inferior es aquel Valor de la Variable cuya Frecuencia Acumulada Relativa ha superado por primera vez a 0,33333 siendo el Superior aquel que ha superado por primera vez a 0,66666. Si en cualquiera de los anteriores casos, la Frecuencia Acumulada Relativa correspondiente fuera igual a 1/3 o 2/3 respectivamente, para obtener el Tercil Inferior o el Tercil Superior, con el valor siguiente superior correspondiente.

CUARTILES.- Los tres Cuartíles de una distribución de frecuencias, son estadígrafos que permiten segmentarla en cuatro partes iguales. Se denominan respectivamente Cuartil Inferior, Q_1, Cuartil Medio, Q_2, y Cuartil Superior, Q_3. La Mediana coincide con el Cuartil Medio. El Cuartil Inferior es aquel que tiene una Frecuencia Acumulada Relativa por primera vez superior a 0,25; el Cuartil Medio a 0,5 y el Superior a 0,75. En el caso de que estas sean iguales a los valores señalados, se procede de forma análoga al previsto para los terciles.

PERCENTILES.- Los 99 percentiles de una serie de datos, ordenados crecientemente por su magnitud, los particionan en 100 segmentos, cada uno de ellos conteniendo la centésima parte de los datos. Denominándose primero, segundo y así sucesivamente hasta el 99[avo] percentil. Para determinarlos como en los casos anteriores se recurre a la Frecuencia Acumulada Relativa.

En el caso de que los datos estén representados por Intervalos de Clases, para hallar con exactitud los Estadígrafos[206] anotados se utiliza la siguiente fórmula:

$$ED_q = m_q + s = m_q + \left(\frac{\frac{n}{r}-\sum_{i=1}^{i=f\,anterior\,a\,q} f_i}{f_{Frecuencia\,de\,la\,Clase\;q}}\right)t_q$$

Esta expresión que permite encontrar el Estadígrafo Posicional "q", en realidad es una generalización de la que permite hallar la mediana en las distribuciones de intervalos de clase, en ella $\mathbf{m_q}$ es el minorante del estadígrafo de posición correspondiente, $\mathbf{t_q}$ su ancho de clase; **n/r,** el número total de datos dividido entre el número **r**, de segmentos que se pretende obtener de la partición.

206 De Posición y también Divisorios.

MODA O MODO

La Moda de una serie de datos es el Estadígrafo de Tendencia Central, consistente en el dato que en ella se hace efectivo el mayor número de veces.

La Moda de una serie estadística, es el dato que tiene la mayor frecuencia absoluta.

En el caso de que dos datos de una serie estadística tuvieren ambos una máxima frecuencia —esta máxima frecuencia fuera idéntica— la serie tiene dos modas y se denomina Bimodal. En el caso de que la máxima frecuencia se repitiera más de dos veces, la serie estadística carece de moda.

Si los datos están agrupados en clases, la moda está contenida en el intervalo de clase con la mayor frecuencia absoluta y se la precisa en atención a la siguiente expresión:

$$Mo(x) = m + s$$

En la que **m** es el límite del intervalo de mayor frecuencia y **s,** el punto exacto de la moda, en el intervalo de ancho **t,** está en correspondencia de las frecuencias de las clases adyacentes, f_{-1}, f_{+1} por lo que se logra de la siguiente manera:

$$s = \frac{f_{-1}}{f_{-1} + f_{+1}} t$$

PROPIEDADES DE LA MODA

1) **PROPIEDAD DE EXISTENCIA INCIERTA.-** No todas las distribuciones de frecuencia tienen una moda. Esta no existe en el caso de que se repitan varios valores con la misma máxima frecuencia.

2) **PROPIEDAD DE UNICIDAD INCIERTA.-** En el caso de que exista la moda, puede no ser única. Esto acontece cuando en una distribución de frecuencias ocurren dos valores con la misma máxima frecuencia.

3) **PROPIEDAD DE CLAUSURA ESTADÍSTICA.-** La moda de una distribución de frecuencias —si existe— es un dato de la indicada distribución.

DEFINICIONES IMPORTANTES RELACIONADAS CON LA MODA

Son sumamente importantes en la interpretación política las siguientes definiciones:

Se define como la submoda al dato que tiene la segunda más alta frecuencia en una serie de datos.

Se denomina Coeficiente Modal a la ratio entre la frecuencia de la moda y el total de datos que contiene una serie estadística[207]. En el caso de que la serie sea bimodal, ambos coeficientes, idénticos, se denominan **Coeficientes Bimodales.** En el sentido político

207 Por lo que el Coeficiente Modal es un número puro, carente de unidades.

común, se nombran Porcentajes Electorales (usándose la base centenaria con preferencia a la unitaria).

La Ordenación de los Datos en atención a su frecuencia relativa, en sentido descendente, se llama Ordenación Modal[208]. Esta ordenación es denominada también Rasgo Estructural de Primer Orden, es un Vector Decreciente. En el sentido corriente, se llama **Resultado Electoral[209]:**

$$\left(\frac{f_1}{\sum f_i} \quad \frac{f_2}{\sum f_i} \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \frac{f_k}{\sum f_i} \right)$$

Las diferencias de las frecuencias absolutas de los datos, en una Distribución de Frecuencias se denominan Diferencias Modales. En el sentido corriente, diferencia de los porcentajes obtenidos.

La Matriz Marginada Superior Izquierda, simétrica[210], que expresa en sus márgenes, las frecuencias absolutas de una distribución de frecuencias en orden decreciente y que tiene por elementos las ratios de las diferencias de las frecuencias absolutas y el total de datos, se denomina Matriz de las Diferencias de los Coeficientes Modales. O también, Rasgo Estructural de Segundo Orden. Notoriamente, se observa que los elementos de su diagonal principal son nulos[211] por lo que la Traza[212] de esta Matriz es nula.

208 Es la presentación más recurrida de los Resultados de una elección política.

209 Generalmente se expresa en porcentajes.

210 Es aquella Matriz Cuadrada en la que se cumple que: $\mathbf{a}_{i,j} = \mathbf{a}_{j,i}$ para todos los elementos que la conforman.

211 **El Valor Absoluto del Determinante asociado a esta matriz es una medida del Grado de Gobernabilidad Resultante de una Elección**. Mientras más alto sea en valor es menor la gobernabilidad (bajo el supuesto de que no se establezcan Alianzas Ulteriores; las que se logran después de producido un resultado electoral, las citeriores son aquellas que se efectúan antes de una elección).

El Determinante de una Matriz cuadrada w x w de elementos $_{\mathrm{aes}}$ un escalar que se obtiene al sumar todos sus Productos Elementales con Signo.

Un Producto Elemental, es el resultado de la multiplicación de W factores de modo que cada uno de ellos pertenezca a una fila y a una columna diferentes. El Signo de un producto elemental es positivo si el número de combinaciones que se han efectuado para obtenerlo es par y es negativo si el número de permutaciones es impar. (Se observa en los subíndices posicionales de las columnas matriciales) de esta manera el signo del Producto Elemental $a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2}$ es positivo porque el vector de orden de las columnas, (3,1,2), se ha obtenido a partir del orden original (1,2,3) mediante dos permutaciones; permutando su primer elemento por su segundo y luego su segundo por su tercero. El número de Productos Elementales de una Matriz **w x w** es **w!**

Como ilustración, el determinante **D** de una matriz **3 x 3** está dado por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}_{1,1}\mathbf{a}_{2,2}\mathbf{a}_{3,3} + \mathbf{a}_{1,2}\mathbf{a}_{2,3}\mathbf{a}_{3,1} + \mathbf{a}_{1,3}\mathbf{a}_{2,1}\mathbf{a}_{3,2} - \mathbf{a}_{1,1}\mathbf{a}_{2,3}\mathbf{a}_{3,2} - \mathbf{a}_{1,2}\mathbf{a}_{2,1}\mathbf{a}_{3,3} - \mathbf{a}_{1,3}\mathbf{a}_{2,2}\mathbf{a}_{3,1}$$

212 La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada se denomina "Traza Matricial".

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & f_1 & f_2 & f_i & f_k \\
\hline
f_1 & \frac{fi-f1}{n} & \frac{fi-f2}{n} & \frac{fi-fi}{n} & \frac{fi-fk}{n} \\
f_2 & \frac{f2-f1}{n} & & \frac{2i-fi}{n} & \\
f_i & \frac{fi-f1}{n} & \frac{fi-f2}{n} & \frac{fi-fi}{n} & \frac{fi-fk}{n} \\
f_k & \frac{fk-f1}{n} & \frac{fk-f2}{n} & & \frac{fk-fk}{n}
\end{array}
$$

En una distribución de frecuencias existe **Polarización Modal,** si la frecuencia de la moda representa más de la mitad de los datos de la serie y Polarización Bimodal si, la frecuencia de la moda y la submoda, suman más de las dos terceras partes del total de los datos y sus Coeficientes Modales no difieren en más de dos décimos.

MEDIA GEOMÉTRICA

Se define como Media Geométrica, Mg(x), de una serie de k datos, a la raíz kesima de su producto:

$$Mg(x) = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{i=k} x_i}$$

Por lo que, el logaritmo (en cualquier base) de la Media Geométrica es la Media Aritmética de los logaritmos de los valores que expresan los datos, al estar definidos los logaritmos únicamente para valores positivos, sólo puede ser usada para el caso de que los datos sean estrictamente mayores a cero, lo cual se denomina Propiedad de Positividad de la Media Geométrica.

Se utiliza la Media Geométrica, en el caso de que los datos, en valor, sean muy diferentes entre sí, lo que hará que la media aritmética sea un estadígrafo de posición que sobreestime la centralización de los datos. Por la misma razón, se la usará cuando se requiera un estadígrafo de tendencia central de datos que representen tasas de variación o porcentajes. No es muy conveniente su uso cuando algunos de los datos se asintotizan a cero.

MEDIA ARMÓNICA

La Media Armónica, MA(x), el Estadígrafo de tendencia central que se obtiene al invertir la Media Aritmética de las inversas de los datos de una serie estadística.

$$MA(x) = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{x_i} f_i}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{x_i} f_i}$$

La Media Armónica se utiliza cuando se desea encontrar un estadígrafo de tendencia central de datos que representan ratios cuyo numerador permanece constante y el denominador varía. Su uso no es conveniente cuando algunos de los datos de la serie se aproximan a cero.

MEDIA CUADRÁTICA

La Media Cuadrática, MC(x), es el Estadígrafo de tendencia central que se logra al extraer la raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los valores de los datos de una serie estadística.

$$MC(x) = \sqrt[2]{\frac{\prod_{i=1}^{i=k} x_i^2 f_i}{n}}$$

La Media Cuadrática es útil en el caso de que los datos de los cuales se quiere encontrar un Estadígrafo de Tendencia Central, representen la diferencia a una cantidad determinada.

MEDIA ARITMÉTICA CORREGIDA[213]

Si una vez que se encuentran la Media Aritmética de una serie de datos, se los pondera de forma inversamente proporcional a su diferencia al cuadrado con su Mediana, más uno, y luego de ello se vuelve a encontrar la Media Aritmética de los datos así ponderados, se obtiene un nuevo Estadígrafo de Tendencia Central denominado Media Aritmética Corregida. Porque da una mayor importancia a los datos que se encuentran próximos a la Mediana y alivia el defecto de la influencia perniciosa de la excesiva influencia de los valores mayores en la Media Aritmética

$$MAC(x) = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} \frac{x_i}{(x_i - M_x)^2 + 1} f_i}{\sum \frac{1}{(x_i - M_x)^2 + 1} f_i}$$

APLICACIÓN EN LA CIENCIA POLÍTICA: INTERPRETACIÓN DE UN SISTEMA ELECTORAL

Antes de continuar abordando las aplicaciones concretas que se derivan de los Estadígrafos de Tendencia Central y los otros Estadígrafos de Posición Desarrollados[214], es menester esbozar la conceptualización de las **Categorías de Fuerza Política y Campo Político.**

FUERZA POLÍTICA.- Una fuerza política es cualquier ente personificado por un conjunto de objetivos[215], con capacidad de generar o evitar cambios sociales importantes. La persona política

213 Este estadígrafo ha sido desarrollado por el Dr. Rafael Tórrez Valdivia.

214 Los Cuartiles y Percentiles.

215 El Concepto de Persona Política es diferente al de Persona Jurídica, el primero puede ser, un Actor Político Individual, un Actor Político Colectivo, una Institución Social reconocida por el Estado, un Actor Político negado por el Estado etc., el segundo únicamente a quien le conceden ese privilegio las leyes (seres humanos

más importante es el Estado debido a la multiplicidad de sus objetivos, es preferible entenderlo como una reunión de varias personas con objetivos hipostáticamente concatenados[216].

La taxonomía principal de las fuerzas políticas sigue dos criterios complementarios. **El primero, las escinde en Fuerzas Políticas Estáticas o Institucionales y en Fuerzas Políticas Dinámicas o no Institucionales. El segundo, las clasifica en Fuerzas Políticas Oficiales y en Fuerzas Políticas no Oficiales.**

De modo necesario y suficiente, toda fuerza política tiene dos elementos, estos son: **Ideología Política y Medios Políticos** (Materialidad Política[217]). **La Ideología Política es la convicción[218] que tiene una Fuerza Política respecto a una situación importante de la sociedad —a un estado socialmente trascendente—.** La Ideología Política es un estado de la voluntad del sujeto político que le compulsa a tomar una Acción Política a efecto de evitar o producir un cambio social.

Los Medios Políticos, son los recursos que dispone una fuerza política a efecto de materializar el significado de su ideología. Los Medios Políticos se clasifican en Medios Políticos Tangibles y en Medios Políticos Intangibles. Los primeros, en Medios Políticos Humanos y en Medios Políticos no Humanos (Infraestructurales, Financieros y Herramientas Políticas). Los segundos en Doctrinarios y Técnicos, aquellos conformados por las Ideas de Fundamentación de la Fuerza Política y estos por la habilidad para discurrir en el Campo Político e incluso la capacidad para instalar y operar los medios tangibles.

Al ser una fuerza política una Magnitud Direccional con un sentido[219], un Vector, se la puede representar mediante una saeta, que apunta a su sentido ideológico y cuyo tamaño norma[220],

individuales o Personas Colectivas de Existencia Necesaria, en nuestro País las Comunidades Originarias reconocidas por la Constitución Política) o la disposición de una autoridad que tiene esa competencia (En la generalidad de los casos, las Prefecturas por una Resolución Administrativa o las entidades públicas que avalan las sociedades comerciales). Como se puede apreciar existe una relación de intersección entre ambos conjuntos, es decir muchas personas son a la vez jurídicas y políticas y otras exclusivamente de una categoría. **En ese contexto, una definición conveniente de una Persona Jurídica es: Un sujeto individual o colectivo con voluntad política para transformar o dejar estática la sociedad.**

216 En Realidad es contradictorio a la axiomática de la Teoría del Estado que en el exista ontológicamente una división e independencia del poder oficial, como no puede existir una división de la soberanía en un único Estado. En realidad lo que ocurre, como lo propone Montesquigu, es que las funciones de sus órganos de poder, bajo un Orden Político Republicano, "debieran" realizarse con una relativa independencia.

217 Esta denominación de uso frecuente, es un tanto impropia en virtud de que existen Medios Políticos Intangibles.

218 Apreciación Convictiva, valoración con pleno convencimiento, sin que necesariamente este hubiera surgido de la discusión (de un razonamiento). Es diferente a la Ideología Filosófico Política, la cual se refiere a las ideas de fundamentación que no son parte del elemento Ideológico Político, sino de los Medios Intangibles de una Fuerza Política.

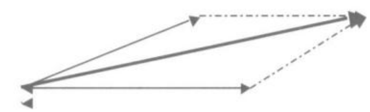
219 Es más apropiado el uso de la palabra sentido bajo una acepción geométrica , en vista de que siempre toda dirección tiene dos sentidos opuestos.

220 Es la palabra adecuada, pero se prescinde en su uso por las confusiones que en este ámbito pudiera originar.

se corresponde a la cantidad de los medios que dispone. El dibujo que prosigue muestra la representación gráfica de una Fuerza Política.

El Plano Direccionado en el cual se representa está en estricta correspondencia al Espectro Político[221] [222] que se han utilizado para definir las fuerzas y las unidades de medida de su tamaño a que previamente se hubiera establecido una convención para poder agregar especies de distinta naturaleza[223].

UN CAMPO POLÍTICO.- Cuya definición, merced a los elementos conceptuales agregados, en este capítulo se puede erigir con mejor precisión: **Es la Reunión de Varias Fuerzas Políticas que Interactúan entre sí[224].** Por lo que todo Campo Político, al igual que todo sistema vectorial genera una resultante que lo representa, **la cual no es sino la suma vectorial de las fuerzas políticas que en el concurren.** Los distintos criterios que se usan para determinar Estadígrafos de Tendencia Central u otros estadígrafos de posición, aplicados a un conjunto de fuerzas políticas, tienen distinto significado respecto a esta resultante. En el esquicio, que sigue se aprecia la resultante de dos fuerzas políticas lograda mediante la aplicación de la regla del paralelogramo.



En adelante, siguiendo la orientación incoada en el capítulo precedente, con un fin pedagógico se asumirá que el valor de una variable política transformada, es su ideología política expresada en términos numéricos y que los medios de las fuerzas políticas se plasman en sus frecuencias[225].

221 Expresado en el anterior capítulo.

222 En la Teoría Política Marxista, que asume los intereses de las Clases Sociales como contradictorios, generando una dicotomía estricta, el plano es unidimensional. Se reduce a un único eje direccional.

223 Usualmente, su simple reducción a unidades monetarias, una solución muy conveniente, presenta varios problemas debido a que son parte de la materialidad, las eventuales acciones de los militantes políticos. Una solución mejor, es definir Unidades de Significación Política, estudio que escapa a los alcances de este texto que simplemente explana los conceptos pertinentes para la aplicación de los resultados de la Ciencia Estadística en la Ciencia Política.

224 Una definición popular expresa: **Es el ámbito en el cual se enfrentan las fuerzas políticas.** Quiere decir que en ámbito tiene sentido en atención a las propias fuerzas políticas.

225 **Le denominaremos supuesto Pedagógico para la Aplicación a la Ciencia Política de los resultados de la Estadística Descriptiva.** Una interpretación más exhaustiva, aunque mucho más difícil de asimilar, seguiría estrictamente las reglas del Álgebra Vectorial e implicaría que cada fuerza política existe en un Espacio Euclídeo **n** dimensional en el cual, cada uno de sus componentes es un sentido protocolario y relevante del "Bien Social".

LA MEDIA ARITMÉTICA.- Representa el Punto de Equilibrio Político. Es la ideología que indica el punto en el cual se equilibran las fuerzas políticas reunidas en un Campo Político. Haciendo una analogía con las fuerzas físicas, en las cuales representa el Centro de Masas, en un Campo Político, es el **Centro de Gravitación de las Fuerzas Políticas** que lo componen. Un punto en el cual, de poder lograrse, las fuerzas políticas alcanzan el equilibrio.

Es connatural que en su determinación tengan mayor importancia las fuerzas políticas extremas cuya distancia con el Centro Gravitatorio Político —la diferencia de la ideología que expresa el Centro de Gravitación del Campo Político con la ideología de una fuerza política concurrente— siguiendo la analogía física, representa un Torque, que en la Ciencia Política se denomina **Cupla Legítima de una Concurrente**[226].

LA MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA.- Representa un punto de equilibrio político logrado sobre la base de la distinta ponderación de las fuerzas concurrentes. En general[227] es un punto de equilibrio no democrático, Equilibrio Forzado (Intervenido), en cuanto la cupla de algunas concurrentes, se ha exacerbado o disminuido —convirtiéndose en ilegítima— en virtud de la capacidad de generar coacción de algunas de las fuerzas que integran el Campo Político.

Puede ocurrir, sin embargo, que la limitación del uso de recursos en una campaña electoral, que pudiese ordenar alguna norma jurídica, determine un Equilibrio Intervenido, que, bajo una concepción no liberal de la democracia, haga más legítimo, respecto a las fuerzas políticas con menos recursos, el Campo Político en el cual actúan.

LA MEDIANA.- Expresa el punto de equilibrio ideológico. Es la ideología que bajo el supuesto de que todos los partícipes políticos, sea cual sea su ideología, actúan en el campo político con la misma intensidad[228], determina un equilibrio pacífico[229]. Por la razón anterior, la mediana es denominada también ideología de consenso[230].

226 Más adelante se interpretará la importancia de las cuplas políticas en la estabilidad del sistema. Sin embargo por el momento resulta obvio que las fuerzas políticas extremas generaran mayor presión en el Campo Político.

227 Bajo las condiciones de la Democracia que ha propuesto Roberto Dahl.

228 En realidad ello pudiera esperarse únicamente en una elección no política, determinada por razones estrictamente técnicas.

229 Se tiene por asumido en su interpretación que todas las fuerzas políticas actúan con el mismo interés, que no existen militantes exacerbados ni abúlicos respecto a la determinación del resultado político. **Cada voto tiene la misma significación política, es decir coincide con la equipolente significación jurídica, que pregona toda democracia.**

230 Obviamente el consenso no le es conveniente a las fuerzas políticas que tienen mayor Cupla Política. Es de esperar que, siendo racionales, no debieran buscarlo las fuerzas políticas extremas. **Nótese que bajo distintos patrones de ordenación, difiere la ideología de consenso.**

Si se ordenaran las concurrentes por su ideología, —elegido un patrón específico—, la ideología de la concurrente situada al medio de ese orden o el promedio de las dos ideologías centrales, representaría la mediana[231].

LA MODA.- Representa la ideología de la fuerza política dominante de un campo político. La ideología del vencedor de una elección, es la Moda Electoral del Campo Político respectivo.

LA SUBMODA.- Es la ideología del principal opositor, el que en un resultado electoral obtiene la segunda mayor cantidad de votos.

EL COEFICIENTE MODAL.- Muestra la Significación Política de una fuerza política concurrente. La Importancia Relativa —en relación a las otras fuerzas políticas— que tiene una fuerza política en un Campo Político Electoral. La diferencia entre dos coeficientes modales expresa la diferencia política entre dos fuerzas concurrentes.

LA ORDENACIÓN MODAL.- En una elección, señala la Estructura Electoral de Primer Orden, es la principal expresión del Resultado Electoral[232]. **La Ordenación Modal Corregida** resulta de distribuir los votos blancos proporcionalmente a su votación, entre las fuerzas concurrentes y restar al sustrato de la votación los votos nulos[233].

LA MATRIZ DE LAS DIFERENCIAS DE LOS COEFICIENTES MODALES.- En la nomenclatura de la Ciencia Política se llama Rasgo Estructural de Segundo Orden de una Elección, mediante el valor absoluto de su Determinante Asociado, es un criterio que permite evaluar la gobernabilidad de una autoridad electa por mayoría[234]. El tamaño de su determinante, indica la fuerza relativa de la opción política vencedora[235] en relación a la totalidad de las fuerzas concurrentes. Es usual que este Rasgo de Segundo Orden involucre únicamente las fuerzas políticas hasta los dos tercios del total de votos, en ese caso se llama **Rasgo Estructural Reducido de**

231 Este equilibrio, suele denominarse ingenuo en tanto que el Resultado de un Campo Político no resulta únicamente de la confrontación de ideologías sino de ellas adheridas a los medios materiales que las respaldan (número de militantes, recursos financieros disponibles, capacidad de generar amenazas a la totalidad de la población, etcétera).

232 En los niveles elementales (de interpretación) que son característicos para su difusión periodística y no para la interpretación científica de una elección.

233 A este procedimiento se denomina **Corrección Técnica del Resultado Electoral.** Con el criterio científico de la Ciencia del Muestreo (a veces diferente a los criterios arbitrarios utilizados por los politólogos) se asume que quienes votan en blanco, **Abstención Relativa de Cuarto Orden,** delegan su decisión a quienes lo hacen efectivamente, y quienes votan de forma nula, **Abstención Absoluta de Cuarto Orden,** rechazan a los elegibles que participan en el acto electoral.

234 En la cual, el elegido es el que consigue el mayor número de votos, en oposición a una elección de representación proporcional, en la cual los distintos sistemas electorales intentan hacer coincidir la estructura de la muestra con la estructura de la población objetivo.

235 La valoración podría efectuarse mediante una comparación histórica, en el caso de que anteriormente hubiesen participado las mismas fuerzas políticas.

Segundo Orden. Por lo que las fuerzas políticas que lo integran se llaman **Fuerzas Políticas Principales** y las que no pueden alcanzarlo **Fuerzas Políticas Marginales.**

LA MEDIA GEOMÉTRICA.- Entre los usos más importantes en la interpretación politológica sirve para establecer Estadígrafos de Tendencia Central de los Coeficientes Modales de algunas o todas las fuerzas políticas que acuden a una elección[236]. También para tener un parámetro de centralización de la evolución de una única fuerza política en distintas elecciones, cuando el sustrato de votación cambia sustancialmente[237]. En general, en todos los casos las variaciones relativas[238] de un mismo género como las tasas de crecimiento[239] —promedio de crecimiento—, tienen por un adecuado Estadígrafo de Centralización a la Media Geométrica.

LA MEDIA ARMÓNICA.- Es un Estadígrafo de Tendencia Central, útil para evaluar la participación media de una fuerza política mediante su coeficiente modal, en distintos resultados electorales, cuando el sustrato de votación no cambia sustancialmente. Y también para determinar la participación media de una fuerza política[240], en diferentes circunscripciones electorales.

LA MEDIA CUADRÁTICA.- Se la utiliza para determinar el Viraje Ideológico de una Fuerza Política o de la Resultante de un Campo Político. En este caso es necesario apartarse del Supuesto Pedagógico y asumir que la fuerza política es un vector situado en un plano euclídeo[241].

236 Siempre que el resultado de ninguna de ellas sea nulo.

237 El número de votos que se recuentan en la elección.

238 Que en su numerador tienen una diferencia y en su denominador una base.

239 Bajo la condición de que no inviertan su signo. Si todas las variaciones fuesen negativas, se obtiene la Media tomando los datos en valor absoluto y luego se les otorga el signo de negatividad, en este caso su nombre será, promedio de decrecimiento.

240 Cuando el conjunto de fuerzas políticas que participan es idéntico.

241 Esta aplicación excede el nivel del texto. Sin embargo como una simple referencia una fuerza política deberá ser representada como:

$$\vec{F} = a1\vec{u}_1 + a2\vec{u}_2 + a3\vec{u}_3 + \ldots\ldots an\vec{u}_n$$

Expresión en la que los componentes $\mathbf{u}_i$ son cada una de las Concepciones Relevantes del Bien Social, que se han puesto en pugna en el Campo Político Electoral, la variación de cada coeficiente $\mathbf{a}_i$ implica un Viraje Ideológico. La Ideología Política Media, **mm**, respecto a la Concepción "**i**" del bien común, en **r** elecciones en las que participa una fuerza política (que no ha cambiado su personería, está dada por:

$$mm_i = \frac{\sqrt{\Pi_{j=1}^{j=r} {ai_j}^2}}{\sqrt{r}}$$

Una Media Cuadrática.

Capítulo Sexto

ESTADÍGRAFOS DE DISPERSIÓN Y OTROS ESTADÍGRAFOS

La dispersión de los datos pertenecientes a una serie estadística, el grado de simetría y de apuntamiento de esta, junto a las medidas de posición que se han desarrollado en el anterior capítulo —y cuando fuera pertinente el grado de concentración de los datos en la serie— permiten con suficiente relevancia[242], su descripción científica y através de ella la de una población objetivo, en una de sus características relevantes.

ESTADÍGRAFOS DE DISPERSIÓN ABSOLUTA

Un Estadígrafo de Dispersión, es una medida de la semejanza[243] de los datos contenidos en una serie estadística, es un indicador objetivo, de cuanto los datos se asemejan —o difieren, bajo una interpretación equivalente— entre sí. Los Estadígrafos de Dispersión se clasifican en Estadígrafos de Dispersión Absoluta y en Estadígrafos de Dispersión Relativa. Es una función primordial de los Estadígrafos de Dispersión el poder, mediante su valor, evaluar la **"Calidad de los Estadígrafos de Tendencia Central"[244].**

Los Estadígrafos de Dispersión Absoluta, verifican la semejanza de los datos, independientemente de cualquier parámetro. Pero tienen unidades de medida[245], así son isodimensionales cuando se expresan en las mismas unidades que refieren los datos, en caso opuesto —cuando se expresan mediante unidades que resultan de potencias de la unidad original— son no isodimensionales. Los principales Estadígrafos de Dispersión Absoluta son: el Rango Efectivo y su Amplitud, el Rango Intercuartílico y su Amplitud, la Desviación Media, la Variancia y la Desviación Típica.

242 Pudiesen existir otras formas de descripción accesorias.

243 De cuanto se parecen entre sí, en términos de su valor, los datos de la serie.

244 La Capacidad de todos ellos o, de alguno en particular, de poder representar los datos de una serie estadística.

245 Que generalmente son potencias de las unidades en las cuales están referidos los datos.

RANGO EFECTIVO Y AMPLITUD DEL RANGO EFECTIVO

Toda serie de datos se define en un campo de existencia limitado por una cota inferior y una cota superior, este ámbito de definición se denomina in extenso, Rango Teórico, Campo de Existencia, Hipótesis de la Variable, Rango a Priori o **Dominio de Definición de la Variable Estadística Descriptiva**. La diferencia entre la cota superior y la inferior se denomina Extensión del Campo de Definición o Amplitud del Rango Teórico.

Sin embargo, a posteriori la verificación fáctica de la variable[246], es posible que algunos de los valores próximos a su Campo de Definición no se efectivicen —no se produzcan realmente— lo cual nos permite redefinir, **ex post, el Rango de la Variable** como: **El intervalo que tiene por cotas el menor y el mayor de los datos que se han hecho efectivos,** dado un Dominio de Definición establecido previamente. La Amplitud de este Rango Fáctico, A(x) es la diferencia entre el mayor, M_x, y el menor, m_x, de los datos que contiene una serie estadística[247];

$Rango = [m_x \quad M_x], \qquad A(x) = M_x - m_x$

Fácilmente se puede apreciar que mientras mayor sea el tamaño del Rango Efectivo, para un número de datos determinado, se esperaría que estos estén más dispersos, distribuidos en una mayor extensión de la variable que los define y, recíprocamente. Por lo que; **la Amplitud del Rango Efectivo es una Medida Adecuada de la dispersión de los datos de una serie estadística.**

RANGO INTERCUARTÍLICO Y AMPLITUD DEL RANGO INTERCUARTÍLICO

Como se predicó en el capítulo anterior, los cuartiles son estadígrafos de posición —tres parámetros— que permiten una vez ordenados los datos de forma creciente, dividirlos en cuatro segmentos del mismo tamaño. Encontrándose entre el primer, Q_1, y tercer cuartil, Q_3, la mitad de los datos, **los Datos Medianos[248],** a los que se les atribuye la calidad de ser los más representativos de la serie.

El Rango Intercuartílico, RI(x), es el segmento de una serie de datos que contiene los datos medianos, por tanto está limitado por el primer y tercer cuartil. Su Amplitud ARI(x), que es una medida de la dispersión absoluta de los datos de una serie estadística, es la diferencia entre el valor del tercer, Q_3, y primer cuartil, Q_1, de la indicada.

$RI(x) = [Q_1 \quad Q_3] \qquad ARI(x) = Q_3 - Q_1$

246 La Contrastación Empírica del Campo de Definición postulado, la verificación de la hipótesis respecto a la variable.

247 Un concepto anejo a Rango Fáctico es el que refiere el Coeficiente de Apertura, definido como el cociente entre el Mayorante y el Minorante de una serie estadística:

$CA(x) = \frac{M_x}{m_x}$

248 Más próximos a la Mediana

DESVIACIÓN MEDIA

Se Define la Desviación Media, DM(x), como la suma de las desviaciones, en valor absoluto, de los datos de una serie estadística a su media aritmética, dividida entre el número total de datos;

$$DM(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \left| \frac{x_i - \bar{x}}{n} \right| f_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} |x_i - \bar{x}| f_i$$

Se colige que cuanto mayor sea la Desviación Media, mayor será la dispersión de los datos.

VARIANCIA Y DESVIACIÓN TÍPICA

La Variancia[249], V(x), de un conjunto de datos, es la media aritmética de las desviaciones cuadráticas a su media. Es la suma de las desviaciones cuadráticas a la media, dividida entre el número de datos[250].

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} x_i^2 f_i}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{i=k} x_i f_i}{n} \right)^2$$ [251]

Al ser la unidad de medida de la variancia diferente a la unidad de medida de los datos[252], para hacerlas corresponder, se eleva la variancia a ½, obteniéndose la **Desviación Típica[253],DT(x),** que por lo tanto, es la raíz cuadrada positiva de la variancia;

$$DT(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}}$$

PROPIEDADES PRINCIPALES DE LA VARIANCIA

NO ALTERACIÓN ADITIVA.- Si una serie estadística original, se transforma en otra por la adición o la sustracción a sus elementos de una constante, la variancia de la serie transformada es idéntica a la variancia de la serie original;

$V(x) = V(x + c)$

249 Estadígrafo Algebraico de Dispersión.

250 Es también, la Agregación de Desvíos Cuadráticos Mínima (Ver en el Anterior Capítulo las Propiedades de la Media Aritmética).

251 La expresión a la derecha de la ecuación, representa una forma abreviada de obtener la variancia.

252 La unidad de medida de la variancia es el cuadrado de la unidad de medida de los datos.

253 El más importante de los Estadígrafos de Dispersión.

AMPLIFICACIÓN CUADRÁTICA.- Si una serie estadística original, se transforma en otra por la multiplicación de sus elementos por una constante, la variancia de la serie transformada es la constante al cuadrado multiplicada por la variancia de la original;

$$c^2V(x) = V(cx)$$

CORRECCIÓN DE LA VARIANCIA DETERMINADA EN SERIES DE INTERVALOS DE CLASE; "CORRECCIÓN DE SHEPPARD"

En el caso de que se calcule la variancia de una serie estadística, de datos agrupados en Intervalos de Clase, de un ancho **"q";** representados por su marca de clase, siendo la serie unimodal y cuyas frecuencias de los datos extremos tienden a cero, la fórmula general de la variancia, sobreestima su valor, debiendo corregirse este exceso restando la duodécima parte del cuadrado del ancho de clase, definido para la serie.

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{i=k}(x_i - \bar{x})^2 f_i}{n} - \frac{q^2}{12}$$

CORRECCIÓN DE LA VARIANCIA MUESTRAL

Si se quiere usar la variancia de una muestra para estimar la variancia de la población objetivo de la cual procede, -**Estimación Puntual**[254]- se la debe multiplicar por el factor de corrección de predicción FC(x):

$$FC(x) = \frac{n}{n-1}$$

INTERPRETACIÓN DE LA SISTEMATICIDAD DE LOS DATOS

La proximidad de un dato a la Media Aritmética de la serie estadística que lo contiene, medida en términos de su desviación típica, refleja su grado de sistematicidad[255]. De esta manera, serán más sistemáticos los que se acerquen más y menos sistemáticos los que se alejen.

La anterior definición permite clasificar los datos de una serie estadística, de acuerdo a su grado de sistematicidad en: **Datos Sistemáticos, Subsistemáticos, Asistemáticos y Antisistemáticos**.

Los **Sistemáticos** se diferencian, de la Media Aritmética (en valor absoluto) en menos de una Desviación Típica;

254 Más adelante se desarrollarán los métodos de estimación de la Variancia y la Desviación Típica por Intervalos de Confianza y por Máxima Verosimilitud.

255 Bajo la asunción de que los datos son elementos de un sistema; **Conjunto de unidades autónomas interconectadas"**.

$$x \in [\bar{x} - DT(x) \quad \bar{x} + DT(x)]$$

Los **Subsistemáticos** difieren de la Media Aritmética, por defecto o por exceso, en más de una Desviación Típica, pero a lo más en dos.

$$x \in \{[\bar{x}\text{-}2DT(x) \quad \bar{x}\text{-}DT(x)[\bigcup]\bar{x} + DT(x) \quad \bar{x} + 2DT(x)]\}$$

Los **Asistemáticos** difieren de la Media Aritmética, por exceso o por defecto, en más de dos Desviaciones Típicas pero a lo más en tres.

$$x \in \{[\bar{x}\text{-}3DT(x) \quad \bar{x}\text{-}2DT(x)[\bigcup]\bar{x}\text{-}2DT(x) \quad \bar{x}\text{-}3DT(x)]\ \}$$

Los **Antisistemáticos** difieren de la Media Aritmética, por exceso o por defecto, en más de tres Desviaciones Típicas.

$$x \in \{[m \quad \bar{x} - 3DT(x)[\bigcup]\bar{x} + 3DT(x) \quad M]$$

ESTADÍGRAFOS DE DISPERSIÓN RELATIVA

Los Estadígrafos de Dispersión Relativa son medidas de la Dispersión de los Datos, mediante un ratio adimensional. Es decir, lo hacen en relación a un parámetro preestablecido que reduce la dimensión de las unidades de un estadígrafo de dispersión absoluta.

El principal Estadígrafo de Dispersión Relativa es el coeficiente de variabilidad de Karl Pearson, debiéndose tener en cuenta también la Dimensión Tipificada del Rango[256] y el Recorrido Relativo.

COEFICIENTE DE VARIABILIDAD DE PEARSON

El Coeficiente de Variabilidad de Pearson, Cvp(x), es la ratio entre la Desviación Típica de una serie estadística y su Media Aritmética. Se lo utiliza para comparar la dispersión de series que contienen datos de diferente naturaleza (están expresados en unidades distintas):

$$Cvp(x) = \frac{DT(x)}{\bar{x}}$$

DIMENSIÓN TIPIFICADA DEL RANGO

Se define como la **Dimensión Tipificada del Rango DTR(x)** a la ratio de la Amplitud del Rango Efectivo y la Desviación Típica de una serie estadística**.** Es el Rango Efectivo, medido en términos de la Desviación Típica. Si su tamaño tipificado es pequeño, los datos estarán desconcentrados en vista de que su unidad de medida es amplia y viceversa.

256 Denominado también Coeficiente de Variabilidad de Zavala.

$$DTR(x) = \frac{M_x - m_x}{DT(x)}$$

RECORRIDO RELATIVO

El Recorrido Relativo, RR(x), de una Serie Estadística, es la Amplitud de su Rango Efectivo dividido entre su Media Aritmética. Indica la dispersión de los datos, tomando en cuenta su tamaño medio.

$$RR(x) = \frac{M_x - m_x}{\overline{x}}$$

MOMENTOS DE UNA VARIABLE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Se define como el momento θ, de una variable estadística x, a la Media Aritmética de sus desvíos, respecto a una constante c, elevados a la θ, potencia entera positiva:

$$MOM_q(x) = \frac{\sum_{i=1}^{i=k}(x_i - c)^{\theta} f_i}{n} = \overline{(x-c)^{\theta}}$$

Cuando la constante **c,** toma el valor de 0, esta expresión determina el Momento Respecto al Origen. El principal momento es el que se establece en el caso de que **c** sea la Media Aritmética, en este caso, se denomina momento respecto a la Media. La variancia ya estudiada es el Segundo Momento con relación a la media.

ESTADÍGRAFOS DE SESGO

Se define el sesgo o distorsión horizontal, como el desequilibrio que tiene una distribución de frecuencias respecto a un parámetro o a un conjunto de datos centrales. Que la distribución, esté más concentrada en valores menores o mayores respecto a ese parámetro. En el primer caso, haciendo una reminiscencia del Histograma de la Distribución de Frecuencias se presenta en el esquicio una cola a la derecha y la serie estadística tiene sesgo positivo; en el segundo, se desarrolla una cola a la izquierda y tiene sesgo negativo. En caso de que no se aprecie ninguna cola o que existan dos colas a ambos lados de los datos centrales, la distribución tiende a ser insesgada.

Se mide el grado de sesgamiento de la distribución de una Variable Estadística Discreta, mediante los estadígrafos de sesgo. Los principales son: **El Tercer Momento Tipificado** —Coeficiente de Asimetría de Fisher—, Los **Coeficientes de Asimetría de Pearson y el Coeficiente de Asimetría de Yule-Bowley.**

Coeficiente de Asimetría de Fisher (CF(x)).- Es la Media Aritmética de los cubos de los datos tipificados que contiene una serie[257];

$$CF(x) = \frac{\sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{DT(x)}\right)^3 f_i}{n}$$

Si es positivo, —**Asimetría Positiva**— las frecuencias de valores inferiores a la media, a una **distancia** determinada —la diferencia a la media en valor absoluto— en general serán mas altos que las frecuencias de valores superiores a la media, a la misma distancia. Si es negativo —**Asimetría Negativa**— las frecuencias de valores superiores a la media, a la misma distancia de los valores inferiores correspondientes, en general serán mayores. Si es cero, la serie es **Simétrica.**

COEFICIENTES DE ASIMETRÍA DE PEARSON

Karl Pearson, propone como coeficientes de asimetría, los siguientes coeficientes, denominados respectivamente primer y segundo Coeficiente de Asimetría de Pearson:

$$P1(x) = \frac{\overline{x} - MO(x)}{DT(x)}$$

$$P2(x) = \frac{3(\overline{x} - ME(x))}{DT(x)}$$

Si es mayor a cero, indica que la Asimetría es Positiva, si es menor a cero, que la Asimetría es Negativa, sin embargo, estos coeficientes son válidos únicamente en el caso de que las series sean unimodales y además su crecimiento o decrecimiento a partir de su moda sea regular[258] **Distribuciones Monoconvexas.**

COEFICIENTE DE ASIMETRÍA DE YULE-BOWLEY

Cuando las distribuciones no son Monoconvexas, como una medida alternativa al coeficiente de Fisher, se puede usar para medir el sesgo de una distribución de frecuencias, el Coeficiente de Asimetría de Yule-Bowley, YB(x), generado a partir de la siguiente expresión;

$$YB(x) = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

Si es positivo existe Asimetría Positiva, (a la derecha) si es negativo Asimetría Negativa (a la izquierda) y si es nulo Insesgamiento.

257 Un Dato Tipificado es aquel al que se le ha restado la Media Aritmética a la que pertenece y se le ha dividido entre su Desviación Típica. Se puede notar que la media de la serie de datos tipificados es necesariamente cero y su Desviación típica igual a uno.

258 Que se invierta una sola vez el crecimiento por decrecimiento, a medida que transcurre el campo de existencia de la variable estadística.

ESTADÍGRAFOS DE CURTOSIS

La forma vertical —**apuntamiento**— general de una distribución de frecuencias se denomina curtosis. Haciendo una referencia a la forma de su histograma, la curtosis es el atributo que permite calificarla como plana (Platicúrtica), regular (Mesocúrtica) o puntiaguda (Leptocúrtica). De otro modo, es la calidad que permite cotejarla con la distribución de frecuencias de una distribución ideal, denominada Distribución Normal, una distribución cuyo perfil se asemeja al de una campana.

Se mide la forma general de una distribución de frecuencias mediante los estadígrafos de curtosis; el principal es el Coeficiente de Curtosis de Fisher-Charlier, que **es la media aritmética de los datos estandarizados a la cuarta menos tres**;

$$CF(x)=\frac{\sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{(x_i-\bar{x})}{DT(x)}\right)^4 f_i}{n}-3$$

Si este coeficiente se aleja de cero a valores negativos, la distribución es platicúrtica, si se acerca a cero es mesocúrtica y si se aleja de cero a valores positivos es leptocúrtica.

ESTADÍGRAFOS DE CONCENTRACIÓN

Se Entiende por concentración, a la acumulación relativa del Espacio Dimensionado de los datos en relación a la acumulación de su frecuencia relativa. El producto del valor del dato por su correspondiente frecuencia se denomina; **"Espacio Dimensionado del Dato "i"**[259] o simplemente **Superficie del Dato**. La suma de los Espacios Dimensionados de los datos, se denomina **"Espacio Dimensionado de la Variable"[260].**

ÍNDICE DE GINI

Una medida de la concentración de los datos de una serie estadística, es el **Índice de Gini[261],** que se define como la suma de las "k-1" diferencias de las frecuencias relativas acumuladas de

259 Porque se expresa en las mismas unidades en las cuales se expresa el dato, se denomina "Espacio Dimensionado".

260 En concreto, si los datos refieren unidades monetarias, como por ejemplo salarios, el grafo en el primer cuadrante del plano cartesiano, cuya abscisa representa la Frecuencia Relativa Acumulada de la variable y cuya ordenada representa la Frecuencia Relativa Acumulada de su Espacio Dimensionado, define la **Curva de Lorenz,** cuyo grado de concavidad permite apreciar el grado de concentración de la variable estadística pecuniaria.

261 La superficie determinada por el índice de Gini es dos veces la encerrada entre la curva de Lorenz y la bisectriz del primer cuadrante del plano cartesiano hasta el máximo de la Frecuencia Acumulada Relativa.

los datos respecto a las dimensiones relativas acumuladas de los datos, sobre la suma de las "k-1" frecuencias relativas acumuladas.

$$IG(x)=\frac{\sum_{j=1}^{j=k-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=j}f_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{i=j}x_if_i}{\sum_{i=1}^{i=k}x_if_i}\right)}{\sum_{j=1}^{j=k-1}\frac{\sum_{i=1}^{i=j}f_i}{n}}$$

ÍNDICE DE TÓRREZ

El Índice de Gini es de particular importancia en aplicaciones económicas, en aplicaciones políticas, para estimar la concentración de los datos es preferible usar el índice propuesto por el autor, que se desarrolla sobre la base de los siguientes conceptos:

CONVERSIÓN ORDINAL DE LA VARIABLE.- La ordenación de los datos, a partir de su ordenación modal, de menor a mayor frecuencia significa la Ordenación Modal de la Variable u Ordenación Ex Post de los Datos, si además luego de establecida esta ordenación se convierte la variable que los representa en una variable ordinal, se ha producido una Conversión de la Variable[262]. De X a X^* en la que la última variable es la variable ordinalmente transformada.

En esa circunstancia, en la cual la nueva variable ordenada, crece de forma estricta de acuerdo con el crecimiento de su frecuencia relativa, el Índice de Tórrez se determina con el algoritmo del indice de Gini.

APLICACIONES EN LA CIENCIA POLÍTICA POSITIVA

AMPLITUD IDEOLÓGICA DEL ESPECTRO POLÍTICO Y DE LA GRADIENTE DE ORDENACIÓN POLÍTICA

Como una Aplicación de la Amplitud del Rango; se define por Amplitud Ideológica del Espectro Político a la diferencia entre el valor que representa a la ideología superior, $I_s(x)$, extrema, en el orden creciente y la que representa la correspondiente ideología inferior, $I_i(x)$.

$$AI(x)=I_s(x)-I_i(x)$$

Significa el número de ideologías diferentes que concurren en un campo político y, su interpretación tiene interés únicamente en cuanto avizora la dispersión de las fuerzas políticas únicamente por su número.

262 El dato moda se denominará el valor 1, la submoda, el valor 2 y así sucesivamente. Es decir se prescindirá del valor real que representan siendo substituido este por el lugar que ocupan en la Ordenación Modal.

Más importante en atención al concepto directriz[263], es la Amplitud de la Gradiente de Ordenación Política **AI*(x)**, o reducidamente Gradiente Política, porque indica el tamaño del campo de existencia de las fuerzas concurrentes; cuan diferentes son las fuerzas políticas que interaccionan en el campo político. El algoritmo que las define es idéntico al anterior con la salvedad de que las cotas son de la Gradiente Política.

$$AI^*(x) = I_s^*(x) - I_i^*(x)$$

DESVIACIÓN MEDIA DEL EQUILIBRIO POLÍTICO[264]

Una medida adecuada de la Dispersión de las Fuerzas Políticas y también, de la Estabilidad de un Campo Político[265]. **Es la Desviación Media de las Fuerzas Políticas[266]**, respecto a la ideología que representa el equilibrio político, el Punto de Equilibrio Político (La Media Aritmética[267]).

$$DM(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \left| \frac{x_i - \bar{x}}{n} \right| f_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} |x_i - \bar{x}| f_i$$

DISPERSIÓN IDEOLÓGICA DE LAS FUERZAS POLÍTICAS

En una Gradiente Política, la Dispersión de las Fuerzas Políticas que la conforman se mide por la Desviación Típica[268] de los elementos de la gradiente política, **DGP(x)**, (Es en realidad la dispersión de las ideologías que interaccionan en el campo político, respecto a la ideología representativa de todo el campo, la Media Aritmética). Se notará que no se considera luego de determinada la Media Aritmética, las frecuencias de cada una de las fuerzas políticas que en el modelo propuesto representan los Medios Políticos;

$$DGP(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=k} (x_i - \bar{x})^2}{k}}$$

263 Amplitud del Rango

264 Exige que se opere sobre la base de una Gradiente Política.

265 En cuanto refiera únicamente una de sus dos causas, la estabilidad. **La Estabilidad de un Campo Político, entendida como la dificultad de que cambie su punto de equilibrio, se origina por dos factores, el primero es la dispersión de las fuerzas políticas concurrentes y el segundo la simetría del sistema.**

266 Se aclara, por la confusión que pudiera suscitar el nombre, que es la diferencia ideológica con la ideología de equilibrio. Un nombre más extenso pero más relevante sería **Desviación Media de las Ideologías Concurrentes.**

267 Bajo los supuestos que se han expresado en el anterior capítulo.

268 Téngase presente que el valor de cada dato se asume como el sentido ideológico y su frecuencia, como los medios que dispone la fuerza política.

CLASIFICACIÓN DE LAS IDEOLOGÍAS POLÍTICAS DE ACUERDO A SU RELACIÓN CON EL EQUILIBRIO POLÍTICO

De acuerdo a su relación con el campo político, las fuerzas políticas se clasifican en: **Sistemáticas, Subsistemáticas, Asistemáticas** y **Antisistemáticas**.

- Son Sistemáticas las fuerzas políticas cuya ideología se aleja de la ideología de la resultante del campo político a lo más en una desviación típica, por exceso o por defecto. Se denominan también Fuerzas Políticas Conservativas[269] o Núcleo Ideológico del Sistema Político.

  $x \in [\bar{x} - DGP(x) \quad \bar{x} + DGP(x)]$

- Son Subsistemáticas las fuerzas políticas cuya ideología se diferencia de la ideología que determina el equilibrio político, por exceso o por defecto, en más de una desviación típica, pero a lo más en dos desviaciones típicas. Se llaman también Fuerzas Políticas Cooperantes[270] en cuanto como las primeras promueven de un modo menos fuerte la conservación del sistema.

  $x \in \{[\bar{x}\text{-}2DGP(x) \quad \bar{x}\text{-}DGP(x) \, [\bigcup] \bar{x} + DGP(x) \quad \bar{x} + 2DGP(x)]\}$

- Son Asistemáticas las fuerzas políticas que ideológicamente se alejan de la ideología de equilibrio político, por exceso o defecto, en más de dos desviaciones típicas pero a lo más en tres desviaciones típicas. Se las conoce también por Fuerzas Políticas No Cooperantes, "Lastre Político".

  $x \in \{[\bar{x}\text{-}3DGP(x) \quad \bar{x}\text{-}2DGP(x) \, [\bigcup] \bar{x}\text{-}2DGP(x) \quad \bar{x}\text{-}3DGP(x)] \;\}$

- Las fuerzas Políticas que en su sentido ideológico difieren de la ideología de equilibrio político en más de tres desviaciones típicas, sea por exceso o por defecto son antisistemáticas. Así se las nomina también por Fuerzas Antagónicas o Fuerzas Políticas Destructivas[271].

  $x \in \{[m \quad \bar{x} - 3DGP(x) [\bigcup] \bar{x} + 3DGP(x) \qquad M]$

DISPERSIÓN POLÍTICA Y CLASIFICACIÓN POLÍTICA DE LAS FUERZAS CONCURRENTES EN UN CAMPO POLÍTICO

Una medida adecuada de la Dispersión Política de las "k" fuerzas presentes en un campo político es su desviación típica, **DP(x),**

$$DP(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}}$$

269 También Fuerzas Políticas Concervaticias, Fuerzas Políticas Sistémicas o Fuerzas Políticas Inscritas.

270 Fuerzas Políticas Adscritas.

271 Fuerzas Destructicias.

La cual siguiendo los criterios vertidos para la desviación ideológica[272], permite clasificar las fuerzas políticas en Sistemáticas, Subsistemáticas, Asistemáticas y Antisistemáticas.

Se notará claramente que la dispersión ideológica —así como la clasificación en la que deriva— es diferente a la desviación política, en cuanto la primera únicamente considera las diferencias de las concepciones sociales de las fuerzas políticas y la segunda, éstas además de los recursos con los que se proponen llevar a cabo esas concepciones[273].

ESTABILIDAD DEL CAMPO POLÍTICO

Un campo político genera una resultante estable[274], bajo tres condiciones:

1) Que la ideología de su resultante, la generada por el equilibrio político, sea próxima al modo político.

2) Que el tamaño del núcleo del sistema político, sea lo mas extenso en relación al tamaño del campo político. La inversa de coeficiente de variabilidad de Zavala que no sea muy alta la dispersión de las fuerzas concurrentes.

3) Que el campo político, sea simétrico en relación a su punto de equilibrio.

272 Aplicando los intervalos que se han señalado.

273 Se pudieran con menor interés, también establecer estadífrafos de tendencia central y de dispersión únicamente de los medios con los que cuentan las fuerzas políticas. Serían llamadas consideraciones respecto al tamaño de las fuerzas concurrentes. En general, en Bolivia las interpretaciones de los resultados de las elecciones se circunscriben a descripciones de tamaño, haciendo abstracción a un espectro político.

274 El campo político es "gobernable".

Capítulo Séptimo

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

Existen tres clases de eventos de acuerdo a su grado de certeza, estos son los Determinísticos, los Estocásticos de Incertidumbre y los Estocásticos de Riesgo.

Un evento es determinístico cuando ocurre por necesidad, es un evento de validez estrictamente formal, en cuanto hubieran o concurrieran sus presupuestos de existencia. Los eventos determinísticos se clasifican en eventos lógicos, metafísicos y reales necesarios.

Un "Evento Lógico" es aquel cuya forma y validez, se corresponde de forma estricta a una composición o descomposición teorética. Un teorema ocurre por la sola composición de axiomas y definiciones sin que interese el grado de validez real de estos protocolos concurrentes. La validez de los protocolos concurrentes (establecida por definición) determina la validez del teorema.

Ilustración, si se sabe que $a<b$ y $b<c$, la transitividad es un evento necesario, sin importar el contenido de las proposiciones concurrentes, a, b, o c, así si el padre es menor al hijo y el padre del padre mayor que este, se concluye de forma absoluta en que el nieto es menor que el abuelo. Sin embargo si al significante "padre" se le diera un contenido distinto, la validez del teorema pudiera cambiar.

Un "Evento Metafísico"[275] es aquel cuyas conclusiones se hallan determinadas por una base axiomática previamente objetivada, un conjunto de principios mediante los cuales se puede elucidar su significación y sentido. Así la atribución de bueno o malo a cualquier acto, parte de la asunción de que fue realizado con libertad y del sentido primario de esa categoría. Siguiendo la moral del **Opus Dei**, calificar un acto humano como bueno o malo tienen una significación

275 Los significantes "evento lógico" y "evento metafísico", han sido acuñados por el autor, en aras de la pretensión pedagógica de la exposición.

y otra bajo la concepción de la Teología de la Liberación en cuanto la base axiomática primaria respecto a la cual se interpreta un hecho, es distinta.

Es bien sabido que en realidad, en las verdaderas discusiones filosóficas, no se discute respecto a las construcciones teoréticas, sino de las bases axiomáticas sobre las cuales se fundamentan.

Un evento Real Necesario es el que acontece porque el orden físico-químico del universo, independientemente de cualquier circunstancia lo impone. Es real en sentido estricto, aquello que está constreñido a las leyes físico-químicas que ordenan el universo. Así en cualquier circunstancia, dos cuerpos cargados de electricidad negativa y positiva, respectivamente, generan entre ambos una fuerza de atracción. Siguen una ley real de validez absoluta vigente en todo el universo. Cuando entre las relaciones funcionales de los atributos físicos o químicos de dos objetos reales, se establece precisión funcional, afirmando por ejemplo en relación al ejemplo anterior, el grado de atracción de dos cuerpos es directamente proporcional a sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, la validez de la proposición deja de ser absoluta, porque esta forma peculiar de atracción depende de las circunstancias[276].

Existen dos clases de eventos que dependen del azar, los Estocásticos de Incertidumbre y los Estocásticos de Riesgo. El azar, esto a suerte o alea, es el conjunto de determinaciones del objeto real que al no haber sido consideradas en su proyección a objeto científico, se manifiestan de forma indirecta, perturbando las relaciones de causalidad manifiestas.

Un evento es **Estocástico de Incertidumbre** si depende del azar, pero el conjunto de resultados que puede producir, no pueden precisarse con certeza[277] o al menos no se puede hacer corresponder a estos resultados una regla que permita medir su verosimilitud; en el primer caso los eventos son imposible de ser descritos de forma completa y en el segundo caso son imposibles de ser medidos en su capacidad de aparecer bajo una determinada forma. En la física subatómica es conocido el principio de incertidumbre de Heinsemberg que afirma que cuando la velocidad de una partícula subatómica se acerca asintóticamente a la velocidad de la luz, es imposible conocer su posición. Es decir, no puede ser delimitado un campo de existencia espacial en el cual se pueda asumir la aparición de la partícula. En las ciencias sociales, es incierto por ejemplo quien gobernará el país después de 35 años, puesto que resultaría imposible delimitar exactamente la nómina de todos los posibles presidentes[278]. Por otra parte, en relación a las ilustraciones que se han dado, si fuera posible, en el primer caso delimitar exactamente el subespacio de existencia de la partícula, no pudiera afirmarse cuan más posible es que aparezca en un punto respecto a otro; en referencia al segundo ejemplo, si pudiera conocerse a todos los que pueden ser presidentes,

276 Pudiera ser influida de un modo decisivo por circunstancias específicas como ser la velocidad inicial de los cuerpos, su forma, el grado de viscosidad del medio, etcétera.

277 No puede describirse un Espacio Muestral, concepto que se estudiará más adelante.

278 Algunos ciudadanos que en ese entonces, llegaran a tener esa aptitud, pudieran morir o ausentarse del país e incluso algunos presidenciables, para esa fecha, en estos instantes pudieran aún no haber nacido.

no se podría construir una función matemática que asigne una medida a la verosimilitud de ser presidentes de cada uno de los que tienen esa aptitud.

Un **Evento Estocástico es de Riesgo**, si depende del azar pero el conjunto de resultados que produce puede determinarse con certeza y además, hacerse mensurable la posibilidad de su efectivización. Es decir que un evento mensurable puede describirse de forma plena y además asignarse a los elementos que conforman esa descripción un número que refleje su capacidad de convertirse en ciertos. La teoría de la probabilidad cuyo bosquejo se desarrollará en lo que continúa, estudia sucesos de riesgo y no de incertidumbre. **La esencia de cualquier fenómeno es el depender del azar, de un modo no tan complejo como para que el intelecto no pueda encausarlo en un patrón matemático.**

La ciencia permite el conocimiento con un determinado grado de certidumbre (conocimiento científico positivo), de aquellos fenómenos cuyo resultados concretos se pueden describir mediante una función de riesgo y permite la noción, con un grado no determinado de certidumbre, de aquellos acontecimientos cuya complejidad no permite reducirlos, para ser descritos, a una función de riesgo. El **Objeto Real** al ser reducido a **Objeto Científico**, no permite su encausamiento a un patrón estocástico, suficientemente sencillo para ser comprensible[279].

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

La Teoría de la Probabilidad refiere el estudio sistematizado de los sucesos de riesgo, en abstracto. Es decir define las condiciones bajo las cuales se puede considerar un hecho como un fenómeno, susceptible de ser mensurado en su grado de certeza.

La Teoría de la Probabilidad es la ciencia cuyo objeto es la determinación de las leyes generales de los sucesos aleatorios, experimental y no experimentales, suficientemente simples como para poder determinar un Espacio Muestral.

Existen tres versiones diferentes de esta teoría, **La Clásica, La Empírica y La Axiomática**, de acuerdo al diferente modo de concebir la probabilidad.

ESPACIO MUESTRAL

Se entiende por Espacio Muestral, al conjunto que contiene todos los resultados elementales[280] y diferentes de un suceso complejo suficientemente circunscrito[281] que depende del azar y que además puede ser inteligido de forma suficiente, esto significa, descrito mediante un algoritmo

279 El método de reducción resulta más arduo de ser comprendido que el propio objeto que se pretende comprender mediante su aplicación.

280 Que no pueden a su vez ser descompuestos en otros sucesos, por otra parte no es necesario que en un espacio muestral los sucesos tengan la misma verosimilitud.

281 Delimitado con suficiente precisión.

matemático. En los textos incipientes se da una definición más restrictiva que enuncia que son todos los resultados posibles de la realización de un experimento. Además es suficiente que los sucesos que lo conforman sean los elementos de una partición y no necesariamente sucesos elementales.

El espacio muestral puede estar asociado ora a un experimento u ora a un suceso natural o social no experimental. Cuando está asociado a un experimento es un Espacio Muestral Experimental, cuando no lo está es un Espacio Muestral Natural o un Espacio Muestral Social de un suceso aleatorio suficientemente delimitado. Por otra parte, los sucesos aleatorios son absolutos si dependen exclusivamente del azar, como el resultado que se origina al arrojar un dado no trucado y relativamente del azar, como por ejemplo la tasa de crecimiento poblacional, que además de varias causas como la disponibilidad de alimentos y el nivel de conocimiento de los métodos anticonceptivos, depende del alea.

De modo estricto, un experimento es un acontecimiento inducido, de resultado variable, controlado y posible de ser repetido una multiplicidad de veces. Un Experimento Social es un evento que introspecta una fracción social[282] bajo las condiciones que se han aludido. Un Espacio Muestral Social, originado como consecuencia de un hecho social no inducido, pero suficientemente delimitado. Como ilustración de un Experimento Social; se hace correr el rumor de la elevación de los precios del transporte y se observan las reacciones de los distintos sectores sociales[283]. Como ilustración de un suceso social no aleatorio, se observa el número de conflictos sociales, cuyo resultado depende del azar.

SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Los **n** sucesos pertenecientes a un espacio muestral son mutuamente excluyentes, si la ocurrencia de uno impide la ocurrencia de los otros y la ocurrencia de cualquiera de ellos, la ocurrencia del suceso. Es decir, son mutuamente excluyentes porque no pueden suceder de forma simultánea. Resulta obvio que todo suceso elemental, respecto a otro suceso elemental sea mutuamente excluyente. Si al arrojar un dado, sale un as, no puede a la vez salir otro valor.

DISTINTAS CONCEPCIONES DE LA PROBABILIDAD

Se define la probabilidad como el grado de certeza que se tiene de que acontezca un Espacio Muestral en un resultado específico. La probabilidad es la medida de la verosimilitud de la ocurrencia de un hecho.

A lo largo de la historia se han generado para explicarla, tres clases de concepciones: **La Clásica, La Empírica y La Axiomática.**

282 Toda la sociedad o un ámbito delimitado de ella.

283 Deberán estar suficientemente delimitadas y explicitadas las formas de difusión del rumor, además del entendimiento de la Reacción Social, estos supuestos se denominan Hipótesis Experimentales.

La concepción clásica, o racionalista de la probabilidad la define como la relación (ratio) entre el número de casos favorables y de casos posibles, cuando todos ellos tienen la misma verosimilitud de acontecer.

$$\Pr(x) = \frac{N^{\circ}\,Casos\ favorables\ para\ el\ suceso\,x}{N^{\circ}\,Casos\ del\ Espacio\ Muestral}$$ [284]

Esta definición plantea el problema de que en cierta medida esta el definens en el definendo y además de que se aplica únicamente a espacios muestrales específicos; aquellos en los cuales todos y cada uno de los eventos son igualmente posibles, como por ejemplo arrojar una moneda o un dado. El espacio muestral del suceso **"**existe un conflicto social en un tiempo t**"**, al no tener en general la misma verosimilitud para sus dos eventos, no puede ser abarcado por la definición anterior.

La Concepción Empírica de la probabilidad, la define como la frecuencia relativa que resulta de la repetición sucesiva de un evento, un gran número de veces.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{nx}{n} = \Pr(x)$$ [285]

Si se lanza indefinidamente una moneda, cuyo espacio muestral contiene los eventos, cara y cruz, un gran número de veces, es de esperar, por la observación de sus resultados que la mitad de las veces la moneda cae en cara y la otra mitad en cruz. Después de observar la salud de una persona por muchos años, se puede llegar a la conclusión que la probabilidad de que enferme de influenza un año cualquiera, toma un determinado valor.

La Concepción Axiomática de la probabilidad, la conceptúa como una medida de la verosimilitud de un hecho azaroso que está suficientemente descrito en un Espacio Muestral, esta medida cumple con los axiomas[286]:

$$P(x_i) \geq 0, \qquad axioma\ de\ positividad$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P(x_i) = 1 \qquad axioma\ de\ convexitud$$

El primero se lee la probabilidad de un suceso perteneciente a un espacio muestral es mayor que cero. El segundo, la suma de las probabilidades de todos (**los n**) sucesos pertenecientes a un

284 El número de casos totales es igual al número de casos del Espacio Muestral.

285 En la que nx representa las veces en los que ocurre el acontecimiento con el atributo x y n el número de casos totales.

286 En una interpretación filosófica se traducen en: "El algo es más que la parte" y "La suma de las partes es igual al todo".

espacio muestral es igual a uno[287]. En lo que continúa de la exposición, se seguirá la concepción axiomática.

Bajo el presupuesto de cualquiera de las concepciones que se han desarrollado, la verosimilitud de un suceso cuya probabilidad se acerca a cero es reducida, es decir tiene escaza capacidad de convertirse en real, en cambio, cuando su probabilidad se acerca a uno su verosimilitud es alta.

TEOREMAS[288] PRINCIPALES DE LA PROBABILIDAD.

Los teoremas más importantes y útiles que se erigen a partir de la axiomática de la probabilidad son:

1) INCLUSIÓN:

$$Si\ A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)\ y\ También: P(B-A) = P(B) - P(A)$$

Si el evento A está incluido en el evento B, entonces la probabilidad del evento A es menor o igual a la del evento B y, también la probabilidad de la diferencia entre ambos eventos, es igual a la diferencia de sus probabilidades independientemente consideradas.

2) CAMPO DE DEFINICIÓN DE LA PROBABILIDAD:

Para cualquier suceso A_i que pertenece a un espacio muestral, se cumple:

$$0 \leq P(A_i) \leq 1$$

La probabilidad de cualquier suceso, únicamente se encuentra en el intervalo [0 1] y en ningún otro.

3) IMPOSIBILIDAD:

Para todo suceso que no pertenezca al espacio muestral se cumple:

$$P(\varphi) = 0$$

Es decir, la probabilidad del suceso imposible es nula.

4) COMPLEMENTARIEDAD:

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

La probabilidad de un suceso es igual a uno menos la probabilidad de su complemento, el complemento de un suceso A es el suceso que cumple con las siguientes propiedades: $A \bigcap A^c = \varphi\ y\ A \bigcup A^c = U$. La intersección del evento con su complemento es vacía y la unión de un suceso con su complemento, origina el espacio muestral.

287 No tiene sentido expresar, como lo hacen algunos textos elementales que la probabilidad de los sucesos que no pertenecen al espacio muestral es cero, porque simplemente no se entienden los sucesos que no pertenezcan al espacio muestral.

288 Recordando, un teorema es una estructura lógica, suscitada a partir de axiomas y definiciones y que sigue determinadas reglas de composición.

5) AGREGACIÓN:

$$P(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i) - \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i \bigcap A_j) + \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k) ....(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i \bigcap A_j . \bigcap A_z$$

La probabilidad de la unión de **n** sucesos pertenecientes a un espacio muestral, es igual a la suma de las probabilidades de los **n** sucesos, menos la suma de las probabilidades de la intersección doble (de dos en dos) de los **n** sucesos, más la suma de la intersección triple, menos la suma de la intersección cuatriple, más la suma de la intersección quíntuple, etcétera. Si los sucesos son mutuamente excluyentes la agregación es simplemente:

$$p(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i)$$

La probabilidad de la unión de **n** sucesos mutuamente excluyentes es la suma de sus probabilidades.

6) COMPOSICIÓN:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A \bigcap A_i)\ tal\ que: A_i \bigcap A_j = \varphi\ \forall i \neq j\ y \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i = S$$

La probabilidad del suceso A, por composición es igual a la suma de las probabilidades de las intersecciones con todos los elementos de una partición[289] del espacio muestral S.

Una forma elemental de composición es:

$$p(A) = p(A \bigcap B) + p(A \bigcap B^c)$$

La probabilidad de un suceso A es igual a la probabilidad con su intersección con un suceso B, más la probabilidad de la intersección con el complemento de B.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Se denomina probabilidad condicional a la probabilidad de la ocurrencia de un suceso cuando anteriormente se conoce que ha ocurrido otro no nulo, del espacio muestral. La magnitud de la probabilidad de B cuando hubo ocurrido A, está definida por la expresión:

$$p(B/A) = \frac{p(A \bigcap B)}{p(A)}$$

Se lee, la probabilidad de que ocurra B tal que ocurrió A está dada por la ratio de la probabilidad de ambos sucesos sobre la probabilidad del suceso A. La probabilidad que al arrojar un dado salga un tres cuando se sabe que ocurrió en un número impar es **1/3 (1/6/1/2)** debido a que la probabilidad de la intersección de que salga impar y de que salga tres, la intersección es de 1/6 y la probabilidad de que salga un número impar, ½.

289 Ver el apéndice N° 1, para tener mejor conocimiento del contenido de ese término.

La realización simultánea de los sucesos A y B, en consecuencia de la expresión que se ha enunciado será:

$$p(A \bigcap B) = p(B / A)\ p(A)$$

La probabilidad de que ocurra el suceso B y el suceso A es igual a la probabilidad condicionada de B, por la probabilidad de A. Generalizando este resultado se tiene:

$$p(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i) = p(A_1)p(A_2 / A_1)p(A_3 / A_1 \bigcap A_2)p(A_4 / A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3)\ldots\ldots p(A_n / \bigcap_{i=1}^{i=n-1} A_i)$$

INDEPENDENCIA

Existe independencia, cuando la ocurrencia de un suceso, no influye de modo alguno en la ocurrencia de otro. Un suceso B, es independiente de otro A, si la probabilidad condicional de su ocurrencia es igual a su probabilidad no condicional,

$$p(B / A) = \frac{p(A \bigcap B)}{p(A)} = P(B)$$

La probabilidad de B, tal que ocurrió A, es igual a la probabilidad de B, sin que el resultado de A, afecte a la probabilidad de ocurrir B.

La anterior relación, lleva a enunciar por simple despeje de la fórmula anticipada que:

$$p(A \bigcap B) = p(A)\,p(B)$$

La probabilidad de la ocurrencia de dos sucesos independientes es igual al producto de sus probabilidades. El anterior resultado puede generalizarse mediante la expresión:

$$p(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i) = \prod_{i=1}^{i=n} p(A_i)$$ [290]

La probabilidad de la ocurrencia de **n** sucesos independientes entre sí, es igual al producto de sus probabilidades.

TEOREMA DE BAYES

Dada la partición $\{\mathbf{A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_n}\}$, la probabilidad de que ocurra el suceso A_r cuando ha acontecido el suceso A,

$$p(A_r / A) = \frac{p(A_r)\,p(A / A_r)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(A_i)\,p(A / A_i)}$$

290 El símbolo $\prod$ se lee "**La Productoria**".

Este teorema, permite calcular la probabilidad de que el efecto hubiera sido causado por una causa específica, *r.* Por lo que el Teorema de Bayes se denomina también Teorema de la Probabilidad de las Causas.

Ejercicios:

1) Desarrollar cuatro espacios muestrales posibles del suceso, se lanza un dado y anotar a continuación el número de elementos que contiene cada espacio muestral:

Solución:

a) S_1={Sale 1, Sale 2, Sale 3, sale 4, Sale 5, Sale 6}, 6 eventos.

b) S2={Sale un número par, sale un número impar}, 2 eventos.

c) S3={Sale un As, no sale un As}, 2 eventos.

d) S4= {Sale un número divisible por 3 y 2, sale un número únicamente divisible por 2, sale un número no divisible por 3 o 2}, 3 eventos.

2) En los comicios electorales, participan tres partidos políticos, A,B,C, si la suma de los porcentajes de votación, obtenidos en boca de urna son: del Partido A, de 25%, del Partido B de 50% y del Partido C de un 15%, calcular la probabilidad:

a) De la abstención.

b) De que una coalición de dos partidos, obtenga la mayoría de los votos.

c) $p((AUBUC)^c)$= 1- p(AUBUC)= 1-(p(A)+p(B)+p(C))= 1-(0.25+0.50+0.15)=0.10

Por el teorema del complemento y de la probabilidad de los sucesos mutuamente excluyentes.

a) Las coaliciones posibles que pueden obtener la mayoría son: (AUB) o (BUC)

Entonces: $$p[(A \bigcup B) \bigcup (B \bigcup C)] = p(A \bigcup B) + p(B \bigcup C) - p[(A \bigcup B) \bigcap (B \bigcup C)] =$$
$$p(A) + p(B) + p(B) + p(C) - p(B) = p(A) + p(B) + p(B) + p(C) - p(B) = 0.9$$

3) En una reunión se encuentra un 20% de personas que son de la agrupación A, un 40% que son de la agrupación B y un 50% de personas que son de la agrupación C. No existe ninguna que sea a la vez de la agrupación A y B, y el número de personas que pertenecen a las agrupaciones B y C es el doble de las que pertenecen a las agrupaciones A y C, calcular la probabilidad:

a) De que una persona elegida al azar pertenezca a las tres agrupaciones

b) De que una persona elegida al azar, sólo pertenezca a la agrupación A.

c) De que una persona pertenezca a las agrupaciones B y C.

a) $$si(A \bigcap B) = \varphi \rightarrow (A \bigcap B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C) = \varphi \bigcap C = \varphi$$
$$por\ lo\ que: p(\varphi) = 0$$

b) $2p(A\bigcap C)=p(B\bigcap C)$

$1=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\bigcap B)-p(A\bigcap C)-p(B\bigcap C)+p(A\bigcap B\bigcap C)$

$1=p(A)+p(B)+p(C)-0-p(A\bigcap C)-2p(A\bigcap C)+0$

$1.1=p(A)+p(B)+p(C)$

$\rightarrow 0.1=3p(A\bigcap C)\rightarrow 1/_{30}=p(A(\bigcap C)$

$\rightarrow p[(A-(BUC))]=p(A)-p[(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C]=0.2-0-1/30=5/30$

c) *Por el Primer y el quinto enunciado del inciso b)*

$\rightarrow p(B\bigcap C)=2(1/30)=1/15$

4) El MAS, obtuvo en la región andina el 80% de los votos, en la región valluna el 70% de los votos y en la región llanera el 40%. El porcentaje de votación efectiva en las regiones mencionadas es de 50%, 20% y 30% respectivamente.

De todas las mesas a nivel nacional, se elije una al zar, de la que a su vez se obtiene un voto, verificándose que es del MAS. ¿Cuál es la probabilidad de que el ánfora provenga de la región oriental?

Por el Teorema de Bayes

$$p(^{orient}/_{MAS})=\frac{p(orient)p(^{MAS}/_{orient})}{p(andin)p(^{MAS}/_{andin})+p(vall)p(^{MAS}/_{vall})+p(orient)p(^{MAS}/_{orient})}$$

$$=\frac{(0.3)(0.4)}{(0.5)(0.8)+(0.2)(0.7)+(0.3)(0.4)}=0.18$$

5) Se tienen dos urnas, la primera, tiene 8 votos para la izquierda, 5 para la derecha y dos votos blancos. La segunda, tiene 6 votos para la izquierda, 4 votos para la derecha y un voto blanco, la probabilidad de que se elija cualquiera de ellas es directamente proporcional al número de votos que contiene. Calcular la probabilidad de que eligiendo un voto al azar y verificando que es para la derecha, provenga de la primera urna.

Sea el suceso A, que el voto elegido provenga de la primera urna

Sea el suceso B, que el voto elegido provenga de la segunda urna

$$p(^{A}/_{derecha})=\frac{p(A)p(^{derecha}/_{A})}{p(A)p(^{derecha}/_{A})+p(B)p(^{derecha}/_{B})}=\frac{(^{11}/_{26})(^{5}/_{15})}{(^{11}/_{26})(^{5}/_{15})+(^{15}/_{26})(^{4}/_{11})}=0.22$$

Capítulo Octavo

VARIABLE ALEATORIA[291]

DEFINICIÓN

Se denomina Variable Aleatoria a la entidad simbólica que, mediante un patrón numérico, representa de forma biunívoca los eventos de un espacio muestral[292].

Es un conjunto numérico cuyos elementos representan los correspondientes de un espacio muestral.

Una variable aleatoria representa de forma matemática sucesos cuya ocurrencia depende del azar y que, sin embargo, pueden ser predichos mediante una función de Cuantía de Probabilidad o Densidad de Probabilidad, como se estudiará más adelante.

Como se puede intuir los atributos de un hecho, pueden depender de una o varias maneras del azar, en el primer caso la variable aleatoria que los describe, se denomina escalar y en otro caso variable aleatoria vectorial. En el presente y en el siguiente capítulo, nos referiremos únicamente a variables aleatorias escalares.

ILUSTRACIÓN (1), se lanza una moneda, si sale cara el suceso se denomina 0 y si sale cruz se denomina 1.

291 Es un conjunto de elementos numéricos, que a su vez representan elementos que pueden ser, en cumplimiento a una ley específica de probabilidad.

292 Es decir a cada elemento del espacio muestral le corresponde un número y a cada número un elemento del espacio muestral.

En oposición a una variable determinística, una variable aleatoria representa una posibilidad específica de ser (de uno de los eventos que componen el espacio muestral) en tanto que aquella representa existencias concretas[293].

ESTRUCTURA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Una Variable Aleatoria tiene por lo expuesto en el anterior punto, un **Dominio** que son todos los eventos en los que se particiona un espacio muestral, un **Recorrido** que es el conjunto numérico que representa estos eventos y una **Ley de Correspondencia**[294], que es la norma que define como es la correspondencia biunívoca, entre los elementos del primero con el segundo de los conjuntos.

ILUSTRACIÓN (2): En relación al ejemplo anterior, el Dominio es el conjunto {Cara, Cruz} el Recorrido {0,1} y la Ley de Correspondencia, "cuando salga cara el evento se denominará 0 en tanto que cuando salga cruz se denominará 1".

CLASES DE VARIABLES ALEATORIAS

Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas. **Son discretas** cuando su dominio, siendo finito ó infinito, es numerable[295] por lo que su recorrido también lo será. En el caso de que sus elementos pertenezcan al conjunto de los Reales **son continuas,** es decir, cuando los elementos de su dominio no son numerables, en este último caso, su recorrido es un segmento[296]. En lo que prosigue del presente capítulo, cuando se haga referencia a una variable aleatoria, se estará haciendo mención de su recorrido.

En el caso de las variables aleatorias discretas, es posible asignar a cada elemento del recorrido de la variable aleatoria (un valor puntual) una probabilidad determinada, originándose una **Función de Cuantía de Probabilidad**[297] y a partir de ella construir una **Función Acumulativa de probabilidad**. En el caso de las variables aleatorias continuas, resulta más pedagógico, definir previamente una **Función Acumulativa de Probabilidad,** y a partir de ella definir una **Función de Densidad de Probabilidad.**

293 Un conjunto es una reunión de elementos (de los cuales todos son) bajo una ley de pertenencia. En el caso de un Espacio Muestral, los elementos no son, sino tienen una probabilidad de ser (sometida a la axiomática de la probabilidad).

294 Esta ley de correspondencia como se recordará, también se denomina "Patrón de Conversión".

295 Sus elementos pueden hacerse corresponder biyectivamente con los elementos del conjunto de los números naturales, es decir se pueden contar.

296 Pudiera ocurrir que esté integrado por la unión de varios segmentos disjuntos de ese conjunto numérico.

297 O, simplemente **Función de Probabilidad**.

FUNCIÓN DE CUANTÍA DE PROBABILIDAD

Se denomina Función de Cuantía de Probabilidad, a la función[298] que asigna a cada uno de los elementos del recorrido de una variable aleatoria discreta, una probabilidad específica, de modo que esta cumpla con los axiomas de la probabilidad:

$$p(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} p(x_i) = 1$$

En un espacio muestral en el cual existen **n** eventos no intersectados entre sí, la probabilidad de cualquiera de ellos es mayor o igual a cero y la suma de todas las probabilidades de los sucesos disjuntos es igual a uno.

ILUSTRACIÓN (3), en referencia al experimento, "Arrojar una moneda"; la función de Cuantía de Probabilidad es:

$$x_1 = 0 \rightarrow p(0) = \tfrac{1}{2}$$

$$x_2 = 1 \rightarrow p(1) = \tfrac{1}{2}$$

ILUSTRACIÓN (4), en referencia al suceso, que tiene por ley aleatoria[299]: "La probabilidad de que un partido político A, en una mesa electoral en la que concurrieron 5 personas, obtenga un voto o más, es inversamente proporcional al número de votos, por el indicado partido" se tiene la siguiente función de Cuantía de Probabilidad.

$$x_1 = 1 \rightarrow p(1) = k/1$$

$$x_2 = 2 \rightarrow p(2) = k/2$$

$$x_3 = 3 \rightarrow p(3) = k/3$$

$$x_4 = 4 \rightarrow p(4) = k/4$$

$$x_5 = 5 \rightarrow p(5) = k/5$$

Se encuentra el valor de k aplicando el axioma de convexitud.

$$1 = \sum_{i=1}^{i=5} p(x_i) = \frac{137}{60}k \rightarrow k = \frac{60}{137}$$

Lo que permite expresar la función de cuantía comprensivamente:

$$p(x_i) = \frac{60}{137x_i} \,/\, x_i \in' \{1,2,3,4,5\}$$

298 Relación inyectiva, en cuanto asigna a cada elemento de su dominio una única probabilidad y sobreyectiva, en cuanto asigna a todos sus elementos una probabilidad.

299 Ley aleatoria es otro nombre con el que se designa de forma lata una función de cuantía de probabilidad o en su caso una función de densidad de probabilidad.

FUNCIÓN ACUMULATIVA DISCRETA DE PROBABILIDAD

Se denomina Función Acumulativa de Probabilidad a la función que para cada valor de x_i expresa la probabilidad de que la variable aleatoria ocurra en valores iguales o inferiores[300].

Probabilidad Acumulada = $F(x_k) = p(X \leq x_k)$

Es también la suma de las probabilidades de los valores inferiores o iguales a un determinado valor de la variable aleatoria. Evidentemente, $F(x_n)$ es igual a 1, en cumplimiento del axioma de convexitud de la probabilidad.

$$F(x_i) = \sum_{i=1}^{i=k} p(x_i)$$

ILUSTRACIÓN (5) la función Acumulativa de la variable aleatoria discreta en la Ilustración (1) es:

x_i		$F(x_i)$
0	→	$1/2$
1	→	1

ILUSTRACIÓN (6).- Desarrollar la Función Acumulativa en relación a la Ilustración (4) [301]

x_i	$F(x_i)$
1	$60/137(1)$
2	$60/137(2) + 60/137(1)$
3	$60/137(3) + 60/137(2) + 60/137(1)$
4	$60/137(4) + 60/137(3) + 60/137(2) + 60/137(1)$
5	$60/137(5) + 60/137(4) + 60/137(3) + 60/137(2) + 60/137(1)$

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Cuando el Recorrido de una variable aleatoria es infinito no numerable, es decir, que la variable es continua, de forma análoga, que en el caso de las variables aleatorias discretas, la probabilidad de la ocurrencia de un segmento, en este recorrido, es mayor a 0 y la probabilidad de que ocurra cualquier segmento contenido en su campo de existencia es igual a 1. Sin embargo, la

300 La Función de Probabilidad Acumulada es una función monótona creciente, que particiona el campo de existencia de la probabilidad en cada uno de sus puntos.

301 $60/137(5) + 60/137(4) + 60/137(3) + 60/137(2) + 60/137(1) = 1$

probabilidad de que ocurra un punto específico de ese espacio muestral es nula[302]. Es necesario entonces, definir una función, f(x), continua, que cumpliendo con los axiomas de la probabilidad, permite establecer la probabilidad de la ocurrencia de un tramo [a b] de la Variable Aleatoria. De este modo, se define la Función de Densidad de Probabilidad como: **La función de variable real que, cuando un tramo *h*, del recorrido de la variable tiende a cero, representa la altura del rectángulo, cuya superficie expresa la probabilidad del indicado tramo[303]**:

$$f(x) = Lim \frac{P[X \leq x+h] - P[X \leq x]}{h} \quad si\, h \to 0 \quad / f(x) \geq 0 \quad y \quad \int_{R_x} f(x)dx = 1$$ [304]

El primero de los postulados, define matemáticamente la función de densidad de probabilidad, el segundo expresa su positividad y el tercero la convexitud del campo de probabilidad.

En atención a la definición que se ha expresado la probabilidad de que la variable aleatoria x adquiera un determinado valor en el intervalo [a b], está dada por:

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

ILUSTRACIÓN (7), la probabilidad de que una fuerza política obtenga un determinado porcentaje de votación, es inversamente proporcional al cuadrado del indicado porcentaje, si es imposible que la fuerza política obtenga menos del 1%:

a) Encontrar la función de densidad de probabilidad que representa el indicado fenómeno.

b) Calcular la Probabilidad de que la fuerza política obtenga una votación entre un 30% a 45% de los votos.

c) Calcular la probabilidad, de que sabiendo que ha ganado la elección, lo hubiera hecho con más de dos tercios de la votación.

RESPUESTA:

a) Por el enunciado, el campo de existencia de la variable aleatoria es: [1 100] entonces aplicando el axioma de convexitud se tiene:

302 Si se acepta que todos los puntos tienen la misma probabilidad de ocurrir, en aplicación de la concepción clásica de la probabilidad, Casos Favorables sobre Casos Totales, se tiene que los casos favorables son uno y los casos totales infinitos, por lo que el coeficiente entre ambos es igual a cero.

303 Definición del autor.

304 De forma impropia pero común, se suele denominar a la densidad de probabilidad, Probabilidad Puntual.

$$1=\int_{1}^{100}\frac{k}{x^{2}}dx=-k\left.\frac{1}{x}\right|_{x=1}^{x=100}=k(1-\frac{1}{100})=0.99k\rightarrow k=1.0101$$

Por lo que

$$f(x)=\frac{1.0101}{x^{2}}$$

b)

$$p(30\leq x\leq 45)=\int_{30}^{45}\frac{1.0101}{x^{2}}dx=-\left.\frac{1.0101}{x}\right|_{x=30}^{x=45}=1.0101(\frac{1}{30}-\frac{1}{45})=1.0101\frac{5}{90}=0.0566$$

c)

$$p(x>66.6/_{x>50})=\frac{\int_{66.6}^{100}\frac{1.0101}{x^{2}}dx}{\int_{50}^{100}\frac{1.0101}{x^{2}}dx}=\frac{-\left.\frac{1.0101}{x}\right|_{x=66.6}^{x=100}}{-\left.\frac{1.0101}{x}\right|_{x=50}^{x=100}}=\frac{\frac{1}{100}-\frac{1}{66.6}}{\frac{1}{100}-\frac{1}{50}}=0.167167$$

FUNCIÓN ACUMULATIVA CONTINUA DE PROBABILIDAD

Es la función monótona creciente que, tiene por dominio el recorrido de la variable aleatoria x asignándole a cada uno de sus elementos la probabilidad de que ocurran valores inferiores a él.

$$Probabilidad\ Acumulada=F(x)=P(X\leq x).$$

Se obtiene integrando la función de densidad entre el minorante y el valor x correspondiente.

$$F(x)=\int_{m}^{x}f(x)dx$$

ILUSTRACIÓN (8), en relación a la función de densidad referida en la Ilustración (7), encontrar la Función Acumulativa de Probabilidad.

$$F(x)=\int_{1}^{x}\frac{1.0101}{x^{2}}dx=-\left.\frac{1}{x}\right|_{x=1}^{x=x}=1.0101(1-\frac{1}{x})$$

$$En\ el\ Recorrido: x\in[1\quad 100]$$

RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD Y ACUMULATIVA DE PROBABILIDAD

La función de Densidad de Probabilidad y la Función Acumulativa Continua de Probabilidad, son recíprocas debido a que constituyen operaciones recíprocamente inversas:

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

$$F(x)=\int_{m}^{x}f(x)dx$$

Es decir que se obtiene la función de densidad de probabilidad derivando la función acumulativa y está integrando la función de densidad de probabilidad desde el minorante de la variable.

ESPERANZA MATEMÁTICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Se define por Esperanza Matemática, al valor al cual converge una variable aleatoria circunscrita a su campo de probabilidad. Es el punto que representa el campo de probabilidad de una variable aleatoria.

En el caso discreto la esperanza matemática está dada por:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=n}x_{i}p(x_{i})$$

La suma del producto de cada valor que puede adquirir la variable por su respectiva probabilidad.

En el caso continuo:

$$E(x)=\int_{R_x}x\,f(x)dx$$

La integral del producto de la variable aleatoria por su densidad de probabilidad en el recorrido de la variable.

ESPERANZA MATEMÁTICA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

La esperanza matemática de una función U(x) de una variable aleatoria, en el caso discreto está dada por:

$$E(U(x_{i}))=\sum_{i=1}^{i=n}U(x_{i})p(x_{i})$$

La suma del producto de los valores de la función $U(x_i)$ por la respectiva probabilidad de x_i

En el caso continuas:

$$E(U(x)) = \int_{m}^{M} U(x) f(x) dx$$

La integral del producto de la función U(x) por la función de densidad de probabilidad.

VARIANCIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Las medidas más importantes de la dispersión de los valores que puede adquirir una variable aleatoria son su Variancia, V(x), y Desviación Típica, S(x), las cuales en el caso discreto están dadas por:

$$V(x) = E((x_i - E(x))^2) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(x))^2 p(x_i)$$

$$S(x) = \sqrt{V(x)}$$

Y en el caso continuo;

$$V(x) = E((x - E(x))^2 = \int_{m}^{n} (x - E(x))^2 f(x) dx$$

$$S(x) = \sqrt{V(x)}$$

El cálculo de las anteriores se puede hacer más sencillo utilizando[305]:

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

COEFICIENTE DE VARIABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Se define el Coeficiente de Variabilidad, la principal medida de dispersión relativa, de una variable aleatoria como la ratio entre su desviación típica y su esperanza matemática:

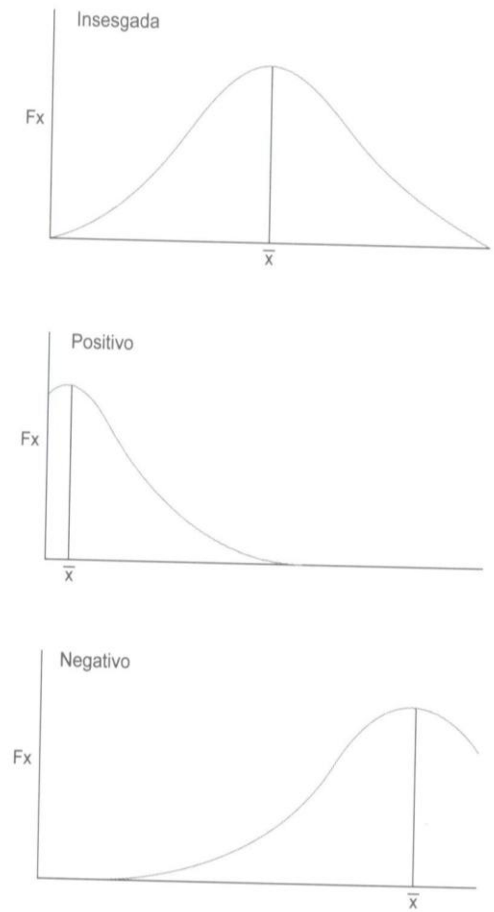
$$CV(x) = \frac{S(x)}{E(x)}$$

SESGO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Se define por sesgo de una variable aleatoria, a la medida del equilibrio horizontal que presenta respecto a un parámetro, generalmente la Esperanza Matemática. Si existe un idéntico (o muy parecido) número de datos distintos, mayores como menores al parámetro del que se ha hecho referencia, la variable aleatoria es **Insesgada.** En particular, si el número de datos distintos, mayores a la Esperanza Matemática es mayor, de forma notoria al número de datos menores a la indicada, la variable tiene **Sesgo Positivo**, en caso opuesto la variable presenta **Sesgo Negativo.**

305 Una equivalencia fácil de demostrar.

Gráfico N°1



La principal medida del sesgo de una variable aleatoria en relación a su Esperanza Matemática, está dada por el **Coeficiente de Sesgo**, cuyo denominador está expresado en términos de la esperanza matemática de una función de la variable aleatoria :

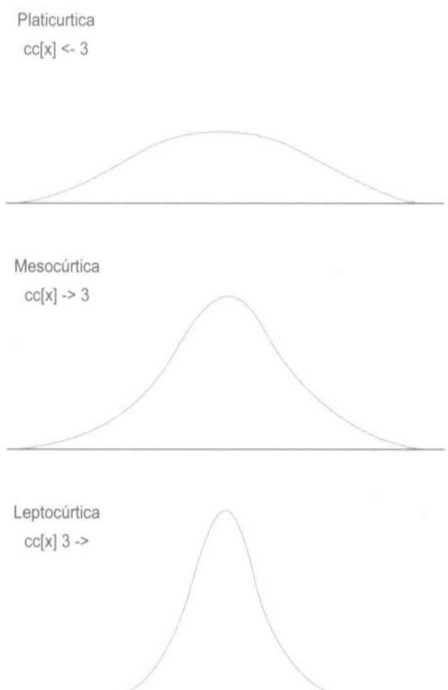
$$CS(x) = \frac{E((x - E(x))^3)}{S(x)^3}$$

Si el coeficiente de sesgo, se aproxima a cero la variable aleatoria respecto a su esperanza matemática es insesgada, si es positivo, es Sesgada Positiva y si es negativo, es Sesgada Negativa[306].

306 Se colige fácilmente que remplazando la esperanza matemática por cualquier otro valor dentro del campo de existencia de la variable, se puede llegar a conclusiones análogas.

CURTOSIS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Se denomina curtosis al grado de apuntamiento que presenta la distribución de cuantía de probabilidad o la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria (según sea discreta o continua). La curtosis es una categoría que hace referencia al equilibrio vertical que tiene la distribución de una variable aleatoria. Si la distribución es puntiaguda, se denomina Leptocúrtica, si es aplanada Platicúrtica y si no es notoria ninguna de las formas referidas, Mesocúrtica.



Una medida de la curtosis de una variable aleatoria es el Coeficiente de Curtosis, definido por:

$$CC(x)=\frac{E((x-E(x))^4)}{S(x)^2}$$

Asumiendo por antonomasia que la variable ideal es la Normal, con desviación típica igual a uno, que tiene por coeficiente de curtosis tres, si la variable aleatoria presenta coeficientes de curtosis menores a tres, es platocúrtica; en caso de que tenga coeficientes mayores a tres leptocúrtica y mesocúrtica cuando su coeficiente de curtosis se asintotiza a tres.

CRITERIOS EMPÍRICOS PARA LA PARTICIÓN DEL RANGO

La Esperanza Matemática y la Desviación Típica permiten segmentar el rango en subrangos de:

a) Sistematicidad Plena (Regularidad Empírica) que contiene todos los valores de la variable que se encuentran alejados de la Esperanza Matemática a lo más en una desviación típica:

$$[E(x)-S(x) \qquad E(x)+S(x)]$$

b) Subsistematicidad, que contiene los valores que se encuentran a más de una desviación típica de la esperanza matemática pero a lo más alejados en dos:

$$[E(x)-2S(x) \qquad E(x)-S(x)[\bigcup]E(x)+S(x)\; E(x)+2S(x)]$$

Comprende el Intervalo de Subsistematicidad Inferior y el de Subsistematicidad Superior.

c) Asistematicidad, que contiene los valores que se encuentran alejados de la esperanza matemática en más de dos desviaciones típicas pero no en más de tres:

$$[E(x)-3S(x) \qquad E(x)-2S(x)[\bigcup]E(x)+2S(x) \qquad E(x)+3S(x)]$$

Comprende el Intervalo de Asistematicidad Inferior y el de Asistematicidad Superior.

d) Antisistematicidad, que contiene los valores que se encuentran alejados de la esperanza matemática en más de tres desviaciones típicas:

$$[-\infty \qquad E(x)-3S(x)[\bigcup]E(x)32S(x) \qquad +\infty]$$

e) Comprende el intervalo de Antisistematicidad Inferior y el de Antisistematicidad Superior.

ILUSTRACIÓN (9), a) encontrar la Esperanza Matemática, b) la Variancia y c) la Desviación Típica d) el Rango de Regularidad Empírica, e) el Coeficiente de Sesgo, f) el Coeficiente de Curtosis de la variable aleatoria referida en la ilustración (4).

a)

$$E(x)=1({}^{60}/_{137(1)})+2({}^{60}/_{137(2)})+3({}^{60}/_{137(3)})+4({}^{60}/_{137(4)})+5({}^{60}/_{137(5)})=2.189$$

b)

Se utilizará el método abreviado que enuncia que la Variancia es la Esperanza de los valores cuadráticos de la variable menos su Esperanza elevada al cuadrado.

$$V(x)=E(x^2)-(E(x)^2)$$

$$E(x^2)=1\,{}^{60}/_{137(1)}+4\,{}^{60}/_{137(2)}+9\,{}^{60}/_{137(3)}+16\,{}^{60}/_{137(4)}+25\,{}^{60}/_{137(5)}=6.569$$

$$E(x)=2.189 \quad \textit{del anterior inciso}$$

$$V(x)=6.569-(2.189)^2=1.79$$

c)

$$S(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{1.79}=1.337$$

d)

$$R(x)=[E(x)-S(x) \qquad E(x)+S(x)]=[2.189-1.337 \qquad 2.189+1.337]=[0.852 \qquad 3.526]$$

$$Corrigiendo\,de\,acuerdo\,a\,la\,posibilidad\,discreta \approx [1 \quad 3]$$

e)

$$CS(x)=\frac{E((x-E(x))^3)}{S(x)^3}=\frac{E((x-2.189)^3)}{1.337^3}=\frac{\sum_{x=1}^{x=5}(x-2.189)^3\frac{60}{137x}}{1.337^3}$$

$$=\frac{\frac{60}{137}\sum_{x=1}^{x=5}\frac{(x-2.189)^3}{x}}{1.337^3}=\frac{\frac{60}{137}\left[\frac{(1-2.189)^3}{1}+\frac{(2-2.189)^3}{2}+\frac{(3-2.189)^3}{3}+\frac{(4-2.189)^3}{4}+\frac{(5-2.189)^3}{5}\right]}{1.337^3}=\frac{\frac{60}{137}(26.99)}{1.337^{\wedge 3}}=4.945$$

Se ha utilizado la Esperanza Matemática y la Desviación Típica encontradas en los anteriores incisos. La Variable Aleatoria presenta sesgo positivo.

f)

$$CC(x)=\frac{E((x-E(x))^4)}{S(x)^4}=\frac{E((x-2.189)^4)}{1.337^4}=\frac{\sum_{x=1}^{x=5}(x-2.189)^4\frac{60}{137x}}{1.337^4}$$

$$=\frac{\frac{60}{137}\sum_{x=1}^{x=5}\frac{(x-2.189)^4}{x}}{1.337^4}=\frac{\frac{60}{137}\left[\frac{(1-2.189)^4}{1}+\frac{(2-2.189)^4}{2}+\frac{(3-2.189)^4}{3}+\frac{(4-2.189)^4}{4}+\frac{(5-2.189)^4}{5}\right]}{1.337^4}=\frac{\frac{60}{137}(75.625)}{1.337^4}=10.36$$

La Variable aleatoria notoriamente es leptocúrtica (puntiaguda).

ILUSTRACIÓN (10), en referencia a la variable aleatoria, en la Ilustración (7), encontrar: a) la Esperanza Matemática de la Variable Aleatoria, b) su Variancia, c) su Desviación Típica, d) sus intervalos de Asistematicidad, e) su coeficiente de Sesgo, f) su Coeficiente de Curtosis.

a)

$$E(x)=\int_1^{100}x\frac{1.0101}{x^2}dx=\int_1^{100}\frac{1.0101}{x}dx=1.0101\;Ln(x)\Big|_{x=1}^{x=100}=1.0101\;Ln(100)=4.65$$

b)

$$V(x)=E(x^2)-(E(x)^2)$$

$$E(x^2)=\int_1^{100}x^2\frac{1.0101}{x^2}dx=\int_1^{100}1.0101dx=1.0101x\Big|_{x=1}^{x=100}=101.01-1.0101=99.999$$

$$V(x)=99.999-(4.65)^2=78.37$$

c) $S(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{78.37}=8.85$

d) Posee únicamente un intervalo de asistematicidad superior, puesto que el inferior cae fuera de su campo de existencia:

$$]E(x)+2S(x) \qquad E(x)+3S(x)]=]4.65+2(8.85) \qquad 4.65+3(8.85)]=]22.35\;31.2]$$

$$CS(x)=\frac{E((x-E(x))^3)}{S(x)^3}=\frac{E((x-4.65)^3)}{8.85^3}=\frac{\int_1^{100}(x-4.65)^3\frac{1.0101}{x^2}dx}{8.85^3}=\frac{1.0101\int_1^{100}\frac{(x-4.65)^3}{x^2}dx}{8.85^3}$$

$$=\frac{1.0101}{8.85^3}\int_1^{100}\frac{(x-4.65)^3}{x^2}dx=\frac{1.0101}{8.85^3}\int_1^{100}\frac{(x^3-(3)4.65x^2+(3)4.65^2x-4.65^3)}{x^2}dx$$

e)

$$=\frac{1.0101}{8.85^3}\int_1^{100}(x-(3)4.65+(3)4.65^2x^{-1}-4.65^3x^{-2})dx$$

$$=\frac{1.0101}{8.85^3}\left[\frac{x^2}{2}-(3)4.65x+(3)4.65^2\,Ln(x)+4.65^3x^{-1}\right]_{x=1}^{x=100}$$

$$=\frac{1.0101}{8.85^3}\{[5000-1395+298.726+1.0054]-[1-13.95+0+100.54]\}=\frac{1.0101}{693.154}(4538.6907)=5.56$$

Por lo que la variable está sesgada positivamente respecto a su Esperanza Matemática, siendo su sesgo más pronunciado que en el caso de la ilustración anterior.

f)

$$CC(x)=\frac{E((x-E(x))^4)}{S(x)^4}=\frac{E((x-4.65)^4)}{8.85^4}=\frac{\int_1^{100}(x-4.65)^4\frac{1.0101}{x^2}dx}{8.85^4}=\frac{1.0101\int_1^{100}\frac{(x-4.65)^4}{x^2}dx}{8.85^4}$$

$$=\frac{1.0101}{8.85^4}\int_1^{100}\frac{(x-4.65)^4}{x^2}dx=\frac{1.0101}{8.85^3}\int_1^{100}\frac{(x^4-(4)4.65x^3+(6)4.65^2x^2-(4)4.65^3x+4.65^4)}{x^2}dx$$

$$=\frac{1.0101}{8.85^4}\int_1^{100}(x^2-(4)4.65x+(6)4.65^2-(4)4.65^3x^{-1}+4.65^4x^{-2})dx$$

$$=\frac{1.0101}{8.85^3}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(4)4.65}{2}x^2+(6)4.65^2x-(4)4.65^3\,Ln(x)-4.65^4x^{-1}\right]_{x=1}^{x=100}$$

$$=\frac{1.0101}{8.85^4}\{[333333.333-93000+129735-1852.1-4.675]-[0.333-9.3+129.735-0-467.5]\}=60.687$$

Lo que le califica como excesivamente leptocúrtica.

FUNCIONES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

En muchas ocasiones es necesario transformar una variable aleatoria en otra con la cual esté exactamente correspondida. Es decir generar una función de la variable original, que a la vez sea una nueva variable aleatoria, cuyo campo de existencia sea una proyección del campo de existencia de la variable aleatoria original. En realidad, cualquier función de una variable aleatoria, describe bajo otra forma equivalente, a la original, un espacio muestral.

Caso discreto, si se establece una función, U(x), de la variable aleatoria x.

$$p(x_i)=p(U^{-1}(u_i)) \qquad Tal\,que: \quad u_i=U(x_i), i=1,2,3,..........n$$

En el caso continuo, sea X una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad $f(x)$. Y sea $U(x)$, una función estrictamente monótona $U(x)$ que genera en el mismo espacio (x,u) una función inversa $U^{-1}(u)$. La función de densidad de probabilidad de U es:

$$h(u) = f(x)\left|\frac{dx}{du}\right| = f(U^{-1}(u))\left|\frac{dx}{du}\right|$$

ILUSTRACIÓN (11), encontrar la función de cuantía de la variable aleatoria, la probabilidad de que el número de ciudadanos que vote por un partido político sea par o impar, en referencia a la Ilustración (4).

$$p(x_i) = \frac{60}{137x_i} \,/\, x_i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$u \in \{0,1\} \; tal\ que \quad par = 0 \quad impar = 1$$

$$u_1 = 0 \qquad P(0) = \frac{60}{137(2)} + \frac{60}{137(4)} = \frac{60(2)+60(1)}{137(4)} = \frac{180}{548} = \frac{45}{137}$$

$$u_2 = 1 \qquad P(1) = \frac{60}{137(1)} + \frac{60}{137(3)} + \frac{60}{137(5)} = \frac{60(15)+60(5)+60(3)}{137(15)} = \frac{1380}{2055} = \frac{92}{137}$$

$$p(u_i) = \frac{45}{137} + u_i\frac{47}{137} \,/\, x_i \in \{0,1\}$$

ILUSTRACIÓN (12), si la variable aleatoria de la que se ha hecho referencia se transforma en una: $U(x)=100-2x$ encontrar su función de densidad de probabilidad.

$$g(u) = \frac{1.0101}{\left(\frac{100-u}{2}\right)^2}\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{2.0202}{(100-u)^2} \,/\, u \in [-100 \quad 98]$$

Capítulo Noveno

VARIABLES ALEATORIAS CARACTERIZADAS

DEFINICIÓN

Una Variable Aleatoria Caracterizada **es un modelo matemático que puede emplearse, con suficiente exactitud en la descripción de varios e importantes hechos que dependen del azar.**

Un modelo matemático, es un algoritmo que representa los patrones principales de un hecho con relevancia fáctica. Si un modelo matemático representa una relación fenoménica (entre dos o más variables) se denomina Tesis Estructural[307]. Si representa el comportamiento de una única variable o de más de una sin que se hubiese definido una relación causal, se denomina Hipótesis Característica; por lo que una variable aleatoria caracterizada es una hipótesis característica.

Las variables aleatorias caracterizadas, pueden ser discretas o continuas. Las principales variables aleatorias caracterizadas discretas, por su utilización en la Ciencia Política son: la Bernoulli, la Binomial, la Geométrica, la Binomial Negativa, la Poisson y la Hipergeométrica. Las principales Variables Aleatorias Continuas son la Variable Uniforme, la Variable Exponencial y la Variable Aleatoria Normal.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Se denomina Variable Aleatoria Bernoulli[308] a la que describe un espacio muestral, integrado únicamente por dos sucesos, éxito y fracaso. De forma equivalente, todo suceso cuyo espacio muestral está integrado por dos sucesos, fracaso (0) y éxito (1), se describe mediante una Variable Aleatoria Bernoulli, cuya función de cuantía tiene el siguiente algoritmo:

307 Como se expuso anteriormente.

308 En honor a su creador, Santiago Bernoulli.

Campo de existencia $\rightarrow x \in \{0,1\}$

$$P(0) = 1 - p$$

$$p(1) = p$$

La Esperanza Matemática, la Variancia, la Desviación Típica, el Coeficiente de Variabilidad, el Coeficiente de Sesgo y el Coeficiente de Curtosis de la Variable Aleatoria Bernoulli son respectivamente:

$$E(x) = p$$

$$V(x) = p(1-p)$$

$$S(x) = \sqrt{p(1-p)}$$

$$CV(x) = \sqrt{\frac{(1-p)}{p}}$$

$$CS(x) = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

$$CC(x) = \frac{1-3p+3p^2}{p(1-p)}$$

Esta variable es importante porque cualquier espacio muestral (incluso los continuos), puede eventualmente reducirse a un espacio muestral Bernoulli, esta conversión se denomina "Transformación Binaria". Además, muchas otras variables aleatorias caracterizadas tienen como fundamento la composición de sucesos Bernoulli. La probabilidad de la ocurrencia de éxito "p" se denomina probabilidad elemental de éxito y "$1-p$", probabilidad elemental de fracaso.

La Esperanza Matemática y la Variancia de la Variable Aleatoria Bernoulli son, respectivamente:

$$E(x) = p$$

$$V(x) = p(1-p)$$

VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL

Una Variable Aleatoria Binomial, describe la probabilidad de la ocurrencia de "x" *éxitos en* "n" sucesos Bernoulli, idénticos (que tienen las mismas probabilidades elementales) e independientes (que uno no influye en el otro)[309]. La probabilidad de x éxitos, cada uno con la probabilidad elemental de éxito p y la probabilidad elemental de fracaso q, cuando se han producido n sucesos Bernoulli[310].

Esta variable se utiliza en el caso de que de una población (supuesta suficientemente extensa se extraiga un elemento, de modo que esta elección no influya en el resultado de la elección ulterior de otro elemento).

309 Que cumple con las condiciones de independencia que se han expresado en el Capítulo Séptimo.

310 Téngase presente que por el axioma de convexitud: $p+q=1$.

Se toma una muestra de un tamaño determinado, eligiendo uno a uno los elementos muestrales. Equivale lo anterior a elegir de una población pequeña, una muestra con reemplazamiento, es decir, que elegido al azar un elemento se lo restituye a la población, para que tenga nuevamente la posibilidad de ser elegido.

El algoritmo matemático que determina su función de cuantía de probabilidad es:

Campo de Existencia $\rightarrow x \in \{0,1,2,.........n\}$

+

$$P(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

La Esperanza matemática, la Variancia Binomial, la Desviación Típica, el Coeficiente de Variabilidad, el Coeficiente de Sesgo y el Coeficiente de Curtosis son, respectivamente:

$$E(x) = n\,p$$

$$V(x) = n\,p(1-p) = n\,p\,q$$

$$S(x) = \sqrt{n\,p(1-p)} = \sqrt{n\,p\,q}$$

$$CV(x) = \frac{S(x)}{E(x)} = \sqrt{\frac{(1-p)}{n\,p}} = \sqrt{\frac{q}{n\,p}}$$

$$CS(x) = \frac{E((x-E(x))^3)}{S(x)^3} = \frac{1-2p}{\sqrt{n\,p(1-p)}} = \frac{1-2p}{\sqrt{n\,p\,q}}$$

$$CC(x) = \frac{E((x-E(x))^4)}{S(x)^4} = 3 + \frac{1-6p(1-p)}{npq} = 3 + \frac{1-6pq}{n\,p\,q}$$

Ilustración (1), de una gran población en la cual el 60 por ciento de los electores son masistas, se entrevista al azar a 8 personas, calcular la probabilidad: a) De que la mitad sean masistas, b) Más de la mitad sean masistas, c) De que ninguno sea masista, d) Cuantos masistas se esperaría encontrar en la muestra e) Suponiendo que un canal de televisión realiza un sondeo de opinión, en que rangos (se puede afirmar) que lo hace con fraude o que la muestra que toma no es representativa.

Sea: x el número de masistas

n=8 el tamaño de la muestra

p=0.6, la probabilidad de encontrar en cada ensayo Bernoulli un masista.

q= 0.4, la probabilidad de no encontrar en cada ensayo Bernoulli un masista.

RESPUESTAS:

a)

$$p(x=4)=\binom{8}{4}0.6^4 0.4^{8-4}=\frac{8!}{(8-4)!4!}0.6^4\,0.4^4=0.232$$

b)

$$p(X>4)=\sum_{x=5}^{x=8}p(x)=\sum_{x=5}^{x=8}\binom{8}{x}0.6^x\,0.4^{8-x}=0.5942$$

c)

$$p(X=0)=p(0)=\binom{8}{0}0.6^0\,0.4^8=\frac{8!}{(8-8)!0!}0.4^8=0.0006$$

d)

$E(x)=(8)(0.6)=4.8\approx 5$

e) Se presume que lo hace con fraude cuando la variable alcanza niveles asistemáticos o antisistemáticos, lo que acontece cuando se alejan en más de dos desviaciones típicas de la media.

$V(x)=(8)(0.6)(0.4)=1.92$

$S(x)=1.3856$

$$\{[0\quad E(x)-2S(x)[\cup]E(x)+2S(x)\quad 8]\}=\{[0\quad 4.8-2(1.3856)[\cup]4.8+2(1.3856)\quad 8]\}$$
$$=\{[0\quad 2.02[\cup]7.57\quad 8]\}\approx[0\quad 2]$$

La muestra sería altamente sospechosa en el caso de que en ella no se encontraran al menos dos masistas[311].

VARIABLE ALEATORIA GEOMÉTRICA

La Variable Aleatoria Geométrica describe la sucesión de "x" ensayos Bernoulli idénticos e independientes, cada uno con una probabilidad elemental de éxito "p" y una probabilidad elemental de fracaso "q", hasta que acontece un éxito. Si se repite un experimento consistente en la realización de una acción que de acuerdo al azar, con probabilidades constantes, puede ocurrir en éxito o fracaso, hasta que el resultado es un éxito, este proceso puede ser descrito mediante una Variable Aleatoria Geométrica. Es decir $p(x)$ representa la probabilidad de que el éxito acontezca en el x ensayo Bernoulli.

Esta variable es adecuada cuando se pretende determinar un resultado favorable mediante la repetición de varios intentos, hasta que efectivamente es alcanzado el éxito. Se asume implícitamente que no aumenta en los sucesivos intentos su destreza el pretensor.

311 Los intervalos que se han usado, no son segmentos de los reales, sino de los números naturales más el cero.

Su función de cuantía de probabilidad está dada por la expresión matemática:

$$\textit{Campo de Existencia}: x\in\{1,2,3,4..............\infty\}$$

$$p(X=x)=p(x)=q^{x-1}p$$

La Esperanza Matemática, la Variancia y la Desviación Típica y coeficiente de variabilidad de la Variable Aleatoria Geométrica están reseñadas, respectivamente por:

$$E(x)=\frac{1}{p}$$

$$V(x)=\frac{(1-p)}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

$$S(x)=\frac{\sqrt{(1-p)}}{p}=\frac{\sqrt{q}}{p}$$

$$CV(x)=\frac{S(x)}{E(x)}=\sqrt{(1-p)}=\sqrt{q}$$

Ilustración (2), se busca al azar un analista político, que no sea inducido en su opinión por ONGs, si la probabilidad "p" de encontrarlo es 0.05 en cada intento, calcular: a) La Probabilidad de encontrarlo en el sexto intento, b) la probabilidad de encontrarlo antes del catorceavo intento, c) La probabilidad de encontrarlo después del décimo intento, d) Cuantos intentos se esperarían realizar hasta encontrarlo, e) Regularmente, el rango de intentos que debieran efectuarse para encontrarlo.

RESPUESTAS:

a)

$$p(X=6)=p(6)=(1-0.05)^{6-1}\,0.05=0.0387$$

b)

$$p(X<14)=\sum_{x=1}^{x=13}p(x)=\sum_{x=1}^{x=13}(1-0.05)^{x-1}0.05=\frac{0.05}{(1-0.05)}\sum_{x=1}^{x=13}(1-0.05)^x$$

Aplicando la fórmula de la suma de una progresión geométrica:

$$S=\frac{ur-a}{r-1}$$ [312]

Se tiene:

$$p(X<14)=\frac{0.05}{(1-0.05)}\frac{(1-0.05)^{13}(1-0.05)-(1-0.05)}{(1-0.05)-1}=0.4866$$

312 En la fórmula que se ha aludido, de la Suma de una Progresión geométrica, "S": a, representa el primer término; u el último y r la razón de la progresión geométrica.

c)

$p(X>10)=1-p(X\leq 10)$ *Por el teorema del complemento*

$$p(X>10)=1-\sum_{x=1}^{x=10}p(x)=1-\sum_{x=1}^{x=10}(1-0.05)^{x-1}0.05=1-\frac{0.05}{(1-0.05)}\sum_{x=1}^{x=10}(1-0.05)^{x}$$

$$p(x>10)=1-\frac{0.05}{(1-0.05)}\left[\frac{(1-0.05)^{11}-(1-0.05)}{(1-0.05)-1}\right]=0.598736$$

d)

$$E(x)=\frac{1}{0.05}=20$$

e)

$$S(x)=\frac{\sqrt{(1-0.05)}}{0.05}=19.4935$$

$$[E(x)-S(x)\;E(x)+S(x)]=[20-19.4935\qquad 20+19.4935]\approx[1\qquad 40]$$

Entre uno y cuarenta intentos.

VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL NEGATIVA

Resulta natural suponer que en algunos procesos aleatorios se continúa una secuencia de sucesos Bernoulli no únicamente hasta que se alcanza un éxito, como en el caso de la Variable Aleatoria Geométrica, sino un número determinado, w de éxitos. Este proceso estocástico es descrito por la Variable Aleatoria Binomial Negativa también denominada Variable Aleatoria de Pascal. **La sucesión de ensayos Bernoulli, idénticos e independientes hasta que se alcanzan w éxitos es descrita por una Variable Aleatoria Binomial Negativa.**

Esta variable describe un experimento consistente en eventos independientes con idéntica probabilidad elemental de éxito, hasta que se alcanza un determinado número de ellos, entonces se detiene la realización de los ensayos.

La función de cuantía de probabilidad de una Variable Aleatoria Binomial Negativa es denotada por la expresión:

$$\textit{Campo de Existencia}: x\in\{w,w+1,w+2,w+3..............\infty\}$$

$$p(X=x)=p(x)=\binom{x-1}{w-1}q^{x-w}p^{w}$$

Al ser esta variable una generalización de la Variable Aleatoria Geométrica, su Esperanza Matemática, su Variancia, su Desviación Típica y su Coeficiente de Variabilidad, respectivamente son:

$$E(x)=\frac{w}{p}$$

$$V(x)=\frac{wq}{p^2}$$

$$S(x)=\frac{\sqrt{wq}}{p}$$

$$CV(x)=\frac{S(x)}{E(x)}=\sqrt{\frac{q}{w}}$$

Ilustración (3), se intenta reclutar 5 militantes, para un partido político de entre las personas de una población, si la indicada fuerza política, obtuvo el treinta y cinco por ciento de la votación en elecciones recientes, cual es la probabilidad de: a) Que se lo logre en 9 intentos, b) que se lo logre en 20 intentos o más, c) En cuantos intentos se espera lograr el objetivo señalado, d) Encontrar el Coeficiente de Variabilidad de la Variable Aleatoria.

RESPUESTAS:

a)

$$p(X=9)=p(9)=\binom{9-1}{5-1}(1-0.35)^{9-5}0.35^5=\frac{8!}{(8-4)!4!}0.65^4\,0.35^5=(70)(0.17850)(0.0052)=0.0656$$

b)

$$p(X>7)=1-p(X\leq 7)=1-\sum_{x=5}^{x=7}p(x)=1-\sum_{x=5}^{x=7}\binom{x-1}{5-1}(1-0.35)^{x-5}0.35^5$$

$$=1-\left[\binom{4}{4}(1-0.35)^0(0.35)^5+\binom{5}{4}(1-0.35)^1(0.35)^5+\binom{6}{4}(1-0.35)^2(0.35)^5\right]$$

$$=1-0.35^5\left[1+(5)0.65+(15)0.65^2\right]=0.9439$$

c)

$$E(x)=\frac{5}{0.35}=14.28\approx 14$$

d)

$$S(x)=\frac{\sqrt{5(1-0.35)}}{0.35}=5.1507$$

$$CV(x)=\frac{S(x)}{E(x)}=\frac{5.1507}{14.28}=0.3606$$

VARIABLE ALEATORIA DE L`POISSON

Si en un proceso Binomial, la probabilidad de éxito elemental tiende a cero, cuando el número de ensayos Bernoulli se hace indefinidamente inmenso, permaneciendo constante su esperanza matemática, se genera un acontecimiento estocástico que puede ser descrito por la Variable Aleatoria de L`Poisson. Es decir, la función de cuantía de probabilidad de una sucesión Binomial, se convierte en una función de cuantía de L`Poisson, con parámetro λ, cuando la probabilidad de éxito elemental, p, tiende a la nulidad a la vez que el número de ensayos Bernoulli, n, tiende a infinito.

Este modelo estocástico se utiliza, en los casos en los cuales la probabilidad de que ocurra un determinado acontecimiento, está únicamente en relación al plazo o al espacio en el cual puede ocurrir, asumiéndose además que en un tiempo o espacio suficientemente corto, es imposible que ocurran simultáneamente más de dos acontecimientos. Se dice que una variable aleatoria de L`poisson describe los sucesos denominados "Raros"[313].

La función de cuantía de probabilidad de una Variable Aleatoria de L`Poisson, está denotada por la expresión:

$$Campo\ de\ Existencia \rightarrow x \in \{0,1,2,.............\infty\}$$

$$P(X=x)=p(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Por lo dicho anteriormente, esta variable se origina cuando:

$$Lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad Tal\,que: \qquad E(x)=np=\lambda$$

La Esperanza Matemática, la Variancia, la Desviación Típica, el Coeficiente de Variabilidad, el Coeficiente de Sesgo y el Coeficiente de Curtosis de la Variable Aleatoria de L`Poisson son, respectivamente:

RESPUESTAS:

$E(x)=\lambda$

$V(x)=\lambda$

$S(x)=\sqrt{\lambda}$

$CV(x)=\frac{1}{\lambda}$

$CS(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$CC(x)=3+\dfrac{1}{\lambda}$

313 Que se alejan de lo que comúnmente se espera.

Ilustración (4), el número de conflictos sociales en un país es de tres mensuales (se supone que no están relacionados entre sí), utilizando un modelo de L`Poisson, calcular la probabilidad de: a) en el plazo de un mes no sucedan conflictos b) En el plazo de un mes, sucedan más de cuatro conflictos, c) Cuando, bajo este modelo, el número de conflictos será superiormente aberrante.

a) $p(X=0)=\dfrac{e^{-3}3^{0}}{0!}=0.0498$

b) $p(X>4)=\sum_{x=5}^{x=\infty}\dfrac{e^{-3}3^{x}}{x!}=1-\sum_{x=0}^{x=4}\dfrac{e^{-3}3^{x}}{x!}=1-e^{-3}\left[\dfrac{3^{0}}{0!}+\dfrac{3^{1}}{1!}+\dfrac{3^{2}}{2!}+\dfrac{3^{3}}{3!}+\dfrac{3^{4}}{4!}\right]=0.1847$

c) $(X>E(x)+3S(x)=(X>3+3\sqrt{3})=(X>8)$

VARIABLE ALEATORIA HIPERGEOMÉTRICA

Si de una población pequeña[314] de tamaño N, que tiene dos clases de elementos los primeros en número N_s y consiguientemente los segundos, en número $N-N_s$, se elige una muestra sin remplazamiento de tamaño n, el número de elementos x, con el atributo s en la muestra, sigue la función de cuantía de probabilidad de una variable Hipergeométrica.

Una Variable Aleatoria Hipergeométrica describe el proceso estocástico que consiste en la elección de una muestra mediante la repetición de ensayos Bernoulli, idénticos en su naturaleza, pero dependientes entre sí.

La función de cuantía de probabilidad de la Variable Aleatoria Hipergeométrica, se sujeta a la siguiente ley matemática:

Campo de Existencia: $x \in \{0,1,2,3.......n\}$

$$p(X=x)=\frac{\binom{N_s}{x}\binom{N-N_s}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

El producto de las combinaciones de los elementos favorables en la población y en la muestra por el producto de las combinaciones de los no favorables en la población y en la muestra, dividido entre el número de combinaciones de los elementos poblacionales y muestrales sin discriminación.

Las siguientes expresiones indican la Esperanza Matemática, la Variancia y el Coeficiente de Variabilidad de la Variable Aleatoria Hipergeométrica:

314 Una población es pequeña cuando la elección de un elemento influye significativamente en la elección de los siguientes.

$$E(x) = n\frac{N_s}{N}$$

$$V(x) = n\frac{N_s}{N}\frac{(N-N_s)}{N}\frac{(N-n)}{N-1} = n\frac{N_s(N-N_s)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$$S(x) = \frac{1}{N}\sqrt{n\frac{N_s(N-N_s)(N-n)}{N-1}}$$

$$CV(x) = \sqrt{\frac{(N-N_s)(N-n)}{n\,N_s(N-1)}}$$

El grado de aproximación de la Hipergeométrica a la Binomial, puede apreciarse en el factor de corrección de la variancia:

$$\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

Que evidentemente tiende a uno cuando la población se hace indefinidamente grande.

Ilustración (5), En un curso de 20 personas, de las cuales 12 son simpatizantes de Convergencia se eligen al azar a 6: a) Calcular la probabilidad de que la mayoría sea de Convergencia, b) Que a lo más uno sea de Convergencia, c) Cuantas personas de Convergencia se espera en la muestra, d) Calcular la desviación Típica de la Variable Aleatoria.

RESPUESTAS:

a)

$$p(X>3) = \sum_{x=4}^{x=6}\frac{\binom{12}{x}\binom{8}{6-x}}{\binom{20}{6}} = \frac{\binom{12}{4}\binom{8}{2}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{12}{5}\binom{8}{1}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{12}{6}\binom{8}{0}}{\binom{20}{6}} = \frac{11385+6336+924}{38760} = \frac{18645}{38760} = 0.481$$

b)

$$p(X\le 1) = \sum_{x=0}^{x=1}\frac{\binom{12}{x}\binom{8}{6-x}}{\binom{20}{6}} = \frac{\binom{12}{0}\binom{8}{6}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{12}{1}\binom{8}{5}}{\binom{20}{6}} = \frac{23+672}{38760} = 0.0179$$

c)

$$E(x) = n\frac{N_s}{N} = 6\frac{12}{20} = 3.6 \approx 4$$

d)

$$S(x) = \sqrt{6\frac{12}{20}\frac{8}{20}\frac{20-6}{20-1}} = 1.03$$

VARIABLE ALEATORIA CONTINUAS

La Variable aleatoria uniforme, describe un acontecimiento que puede ocurrir con la misma verosimilitud en un intervalo determinado y no en otro. Es el modelo matemático mediante el cual se describen los acontecimientos estocásticos, infinitos no numerables, que entendidos mediante un patrón numérico, se circunscriben en su ocurrencia a un intervalo de los reales, [a b][315] en el que establecen una función de densidad de probabilidad constante.

Al ser una función continua, la función de densidad de Probabilidad de la Variable Aleatoria Uniforme se denota por la expresión matemática:

Campo de Existencia $\quad x \in [a \quad b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Su Esperanza Matemática, Variancia, Desviación Típica y Coeficiente de Variabilidad, son, respectivamente:

$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$S(x) = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$$

$$CV(x) = \frac{(b-a)}{(b+a)\sqrt{3}}$$

Gráfico Nº1

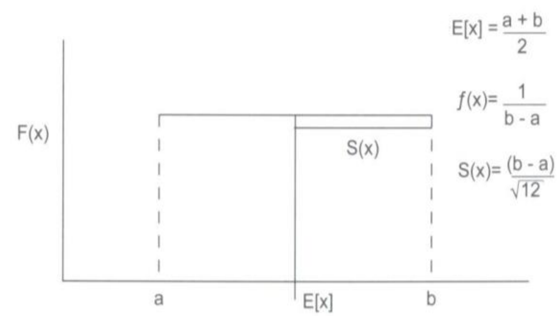


Ilustración (6), el porcentaje que puede obtener un determinado partido político, en una elección, con la misma verosimilitud, se encuentra entre un 42 y 54 por ciento: a) Calcular la Probabilidad de que gane, b) Calcular la probabilidad de que obtenga un Resultado electoral, anormal inferior.

315 Fuera del indicado intervalo, la verosimilitud de su ocurrencia es nula.

RESPUESTAS:

a)

$$Sea\ la\ función\ de\ densidad: \ f(x)=\frac{1}{54-42}=\frac{1}{12} \quad en \quad x\in[42 \quad 54]$$

$$p(x>50)=\int_{50}^{54}\frac{1}{12}dx=\left[\frac{1}{12}x\right]_{50}^{54}=\frac{54-50}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

b)

$$E(x)=\frac{42+54}{2}=48$$

$$S(x)=\frac{54-42}{\sqrt{12}}=3.464x$$

$$p(E(x)-2S(x)<x<E(x)+2S(x))=\int_{E(x)-2S(x)}^{E(x)-S(x)}\frac{1}{12}dx=\int_{41.072}^{44.536}\frac{1}{12}dx=\int_{42}^{44.536}\frac{1}{12}dx \ \ Por\ exeder\ el\ Campo\ de\ x$$

$$=\int_{42}^{44.536}\frac{1}{12}dx=\left[\frac{x}{12}\right]_{42}^{44.536}=\frac{44.536-42}{12}=0.2113$$

VARIABLE ALEATORIA EXPONENCIAL

La duración de un componente autónomo de un sistema, sometido a un constante mantenimiento, puede ser descrita adecuadamente, mediante una Variable Aleatoria Exponencial.

En general, se prevé que la duración de una pieza funcional, sometida a un continuo cuidado, es más verosímil al principio del tiempo en el cual se la somete a observación que en un tiempo más largo. El cuidado, que se le debe prestar, no implica su mejoramiento ni deterioro, sino simplemente la reposición de su capacidad funcional en cada instante.

La variable aleatoria que describe con suficiente exactitud el acontecimiento reseñado es la variable aleatoria exponencial, cuya función de densidad de probabilidad es:

Campo de Existencia $\rightarrow \quad x\in[0 \quad \infty[$

$$f(x)=\varphi e^{-\varphi x}$$

Su Esperanza Matemática, Variancia, Desviación Típica y Coeficiente de Variabilidad son, respectivamente:

$$E(x)=\frac{1}{\varphi}$$

$$V(x)=\frac{1}{\varphi}$$

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$$

$$CV(x)=\sqrt{\varphi}$$

Gráfico Nº 2

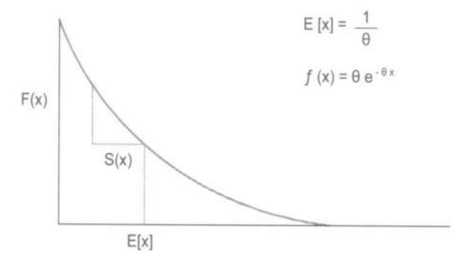


Ilustración (7), la duración de un partido político coyuntural[316], sometido a actos de prevención política[317], hasta que aparezca la primera crisis, que se espera ocurra a los cuatro años de que ejercite sus funciones, sigue una distribución exponencial: **a)** Calcular la probabilidad de que una crisis acontezca antes del año de su fundación **b)** La crisis ocurra entre el tercero y el quinto año **c)** Regularmente en que rango de tiempo debiera suscitarse una crisis:

RESPUESTAS:

a)

Por el enunciado se tiene:

$$E(x)=4\rightarrow\varphi=\frac{1}{4}$$

$$f(x)=0.25\,e^{-0.25x}$$

$$p(x<1)=\int_{0}^{1}0.25\,e^{-0.25x}\,dx=\left[-e^{-0.25x}\right]_{x=0}^{x=1}=\left(e^{0}-e^{-0.25}\right)=\left(1-e^{-0.25}\right)=0.2211$$

b)

$$p(3<x<5)=\int_{3}^{5}0.25e^{-0.25x}\,dx=\left[-e^{-0.25x}\right]_{3}^{5}=\left(e^{-0.25(3)}-e^{-0.25(5)}\right)=0.1858$$

c)

$$[E(x)-S(x)<x<E(x)+S(x)]=[4-2 \quad 4+2]=[2 \ 6]$$

316 **Un Partido Político Coyuntural** es aquel que en el transcurso del tiempo se desgasta sin lograr ulteriormente recuperación. En Oposición, un **Partido Político Estructural**, luego de una depresión (que puede ser una crisis institucional o un decrecimiento en la preferencia ciudadana), logra alcanzar nuevamente una situación de preeminencia.

317 Los denominados actos de prevención política, consisten en actividades de mantenimiento del partido, sin que signifiquen su fortalecimiento o decadencia; el controlar las amenazas que se suscitan al interior del partido, **prevención interna** y las que son originadas por agentes externos que intentan su destrucción, **prevención externa**.

VARIABLE ALEATORIA NORMAL

El Principio de la Consistencia de cualquier población, denominado también principio general de conservación poblacional, afirma: **Que una población es consistente si en sus atributos principales predomina la mediocridad.** El anterior aserto, que tiene una alta carga ideológica, se explica a partir de la funcionalidad de un individuo perteneciente al género, entendida en abstracto, por su grado de representatividad real y no por un ideal moral. Son los patrones posibles que impone la realidad, comunes a la mayor parte de los miembros de una población los que le dan una característica. Así, si un atributo principal de la población de las estrellas es su tamaño, este no será demasiado extenso ni muy pequeño, en general, es decir, la mayoría de esos cuerpos celestes oscilara en torno a un tamaño medio, como un mandato inconmovible de la naturaleza. En el ámbito biológico, si la inteligencia de los animales superiores es uno de sus atributos importantes, se aproximará su distribución a una "Normal".[318]

Como una aplicación de estos principios, el autor en su Teoría General de la Ciencia Política, propone bajo la forma de un teorema, que al ser el patrimonio de los individuos (manifestado en ingreso o en riqueza) un atributo esencial en el sustrato social, el hecho de que no se distribuya normalmente, es la causa principal de los conflictos sociales[319].

Por otra parte, si de una población se toman muestras aleatorias de un determinado tamaño, cuando este se hace indefinidamente grande, (en la práctica mayor a 30 elementos muestrales) las medias tomadas, se aproximan a una Distribución Normal. Esta característica, independientemente de la naturaleza o significación de los elementos de una población es uno de los principales resultados de la Estadística Superior, que será abordado en la segunda parte de la obra.

Con los antecedentes señalados, podemos definir la Variable Aleatoria Normal, como la más importante de todas las variables aleatorias, presenta la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$Campo\ de Existencia \quad \rightarrow x \in \left]-\infty \quad \infty\right[$$

$$f(x) = \frac{1}{\phi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\phi^2}}$$

En la que μ, representa su Esperanza Matemática y ø, su Desviación Típica.

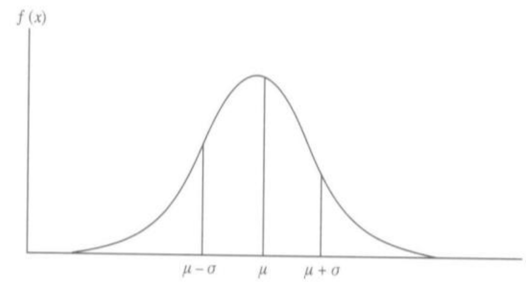
Se caracteriza además una Variable Aleatoria Normal, como se puede apreciar en el gráfico, por tener una función de densidad de probabilidad simétrica respecto al eje de proyección

318 Con exacta precisión entiende esta ley de la naturaleza y de la sociedad, Max Weber cuando define el "Tipo Ideal", como un patrón que sirve para las caracterizaciones en la sociedad.

319 Esta concepción monotética se orienta a lo que de común se observa en sociedades democráticas, donde a pasado a segundo grado el conflicto étnico.

perpendicular de su Esperanza Matemática, es decir, es insesgada respecto a su Esperanza Matemática. Por otra parte, los dos puntos de inflexión[320] que se aprecian en el grafo, se encuentran exactamente a una desviación típica de su esperanza matemática.

Gráfico de la Función de Densidad de Probabilidad de la Variable Aleatoria Normal.



Cuando la esperanza matemática de una Variable Aleatoria Normal es 0 y su desviación típica es igual a 1, la Variable Aleatoria, se denomina Variable Aleatoria Normal Tipificada, que será denotada por "z" y de la cual se tiene una tabla de tabulación, que se presenta como apéndice del segundo tomo del texto.

CONVERSIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA NORMAL ORDINARIA EN UNA VARIABLE ALEATORIA NORMAL TIPIFICADA

Se convierte, para efectos de poder usar la Tabulación de la Tipificada, una Normal No Tipificada, x, en una Tipificada, z , restándole su media y dividiéndola entre su desviación típica;

$$z = Variable\ Normal\ Tipificada$$

$$x = Variable\ Normal\ No Tipificada$$

$$z = \frac{x-\mu}{\phi}$$

TABULACIÓN DE LA VARIABLE ALEATORIA NORMAL TIPIFICADA

La Tabla que se presenta en el anexo, refiere la Probabilidad Acumulada de la Variable Aleatoria Normal Tipificada, es decir:

$$p(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

320 Un punto de inflexión es aquel en el cual una variable cambia de convexa a cóncava o viceversa.

En el margen izquierdo de la tabla, se despliegan los dos primeros dígitos del valor de la variable aleatoria, z, y el tercer dígito lo expresa el margen superior. Se aprecia claramente que la probabilidad acumulada para valores inferiores a **-3.9** es cero y que la probabilidad acumulada para valores superiores a **+3.9** es uno. De esta manera para poder calcular p(a<z<b), se encuentra ambas probabilidades acumuladas, cursantes en el seno de la tabla, restando de la primera la segunda.

Ilustración (8), El porcentaje de abstención electoral, a lo largo de varias elecciones nacionales, se acomoda a una distribución normal con media en 9% y desviación típica de un 3%: a) Calcular la Probabilidad de que supere el 10%; b) Calcular la probabilidad de que sea inferior a un 3%, c) Calcular la probabilidad de que se encuentre entre un 6% y un 7%.

RESPUESTAS:

a)

$p(x>10)=1-P(x\leq 10)$ *Por el teorema de la probabilidad del complemento*

$P(x\leq 10)=p(\frac{x-u}{\phi}\leq\frac{10-9}{3})=p(z\leq 0.333)$ *Convirtiendo a una típica*

$P(z\leq 0.333)=0.6293$ *Valor de tablas*

$p(x>10)=1-0.6293=0.3707$

b)

$p(x<3)=p(\frac{x-u}{\phi}<\frac{3-9}{3})=p(z<-2)=0.0228$ *Valor de tablas*

c)

$$p(6\leq x\leq 7)=p(\frac{6-9}{3}\leq\frac{x-u}{\phi}\leq\frac{7-9}{3})=p(-1\leq z\leq 0.333)$$

$$=p(z\leq 0.333)-p(z\leq -1)=0.6293-0.1587=0.4706$$

Capítulo Décimo

VARIABLE ALEATORIA VECTORIAL

INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los eventos, existe más de una característica aleatoria[321], más de una propiedad que en determinado grado depende del azar, en este caso, el espacio muestral no puede ser descrito por un escalar, sino por un vector. Este tipo de evento es característico en toda tesis no elemental, en la cual en cada proposición fenoménica, existe más de una causa que en un determinado grado y con cierta probabilidad influye en el efecto. Así en el tiempo de caída de un cuerpo se puede proponer como objeto científico que depende del tiempo en el que se desarrolla y de la forma del objeto, factores que además de representarse en la relación fenoménica por si, representan muchas otras variables, como por ejemplo, la viscosidad del medio en el que se produce, la altura a nivel del mar, su grado electrostático, etcétera, que influyen de forma aleatoria en las manifestaciones que les atribuimos a las variables explícitas. En el orden social, el origen de los conflictos políticos, no depende únicamente de las desigualdades del nivel de ingreso y de la subrepresentación en el gobierno del estado de determinadas clases, sino de una gran gama de causas, sin embargo, una tesis política que involucre como explicación de ese efecto a ambas variables, tiene suficiente significación si asumimos que las variables que representan las causas tienen no una influencia determinística sino aleatoria.

Los modelos que se han desarrollado en los dos anteriores capítulos (monotéticos), tienen un gran valor pedagógico, sin embargo un estudio más profundo, necesariamente deberá abandonar la elementalidad causal,[322] describiendo los fenómenos positivos mediante un vector, cuyos elementos estén entre sí, en general interrelacionados, denominados modelos pluritéticos.

321 Que depende del azar.

322 El explicar los efectos con una única causa.

VARIABLE ALEATORIA VECTORIAL

Todo proceso fáctico, entendido como objeto científico, mediante una relación fenoménica, en la que están involucradas, de forma no elemental, más de una causa, puede ser descrito o explicado por una variable aleatoria vectorial.

Una Variable Aleatoria Vectorial es la función matemática que tiene por dominio un espacio muestral no singular[323] y por recorrido un espacio vectorial numérico[324] de la misma dimensión y en correspondencia biyectiva con el primero[325] de forma que cumple mediante su Función de Cuantía de Probabilidad Vectorial, o su Función de Densidad de Probabilidad Conjunta, según sea discreta o continua, con la axiomática de la probabilidad[326].

De forma análoga, a lo acontecido con las variables aleatorias escalares, la estructura de las variables aleatorias vectoriales tiene tres elementos principales: a) El espacio muestral no singular, b) El recorrido que corresponde a un espacio vectorial numérico, c) La Ley de Correspondencia de los acontecimientos del Espacio Original, residente en el Espacio Muestral con el Espacio Vectorial que lo representa biyectivamente.

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES ALEATORIAS VECTORIALES

Según sean los elementos del vector pertenezcan a un conjunto numerable o al conjunto de los Reales, las variables aleatorias se escinden en Variables Aleatorias Vectoriales Discretas y Variables Aleatorias Vectoriales Continuas[327].

VARIABLES ALEATORIAS VECTORIALES DISCRETAS

Las variables Aleatorias Vectoriales Discretas, representan un conjunto numerable de puntos en un espacio vectorial, de modo que a cada uno de ellos, se les asigna (directamente) **una determinada probabilidad de existencia.**

La función que a cada punto, asigna una probabilidad se denomina Función de Cuantía de Probabilidad Vectorial;

323 De más de una dimensión.

324 Vectores cuyos elementos son números.

325 Definición del Autor.

326 Definición del Autor.

327 Denominadas Variables Aleatorias Vectoriales Homogéneas. Existe la posibilidad de la existencia de variables aleatorias mixtas, Heterogéneas, cuando algunos de los elementos vectoriales pertenezcan a un conjunto numérico discreto y los otros al conjunto de los Reales, sin embargo, su estudio corresponde a un nivel superior al desarrollado en el presente texto.

$$\textit{Campo de Existencia} \rightarrow \qquad (X_{1,}X_2, X_{3\ldots\ldots}X_n) \in \left\{ \begin{array}{ccccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & x_{1,n_1} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & & & x_{n,n_n} \end{array} \right\}$$

$$\textit{Función de Cuantía de Probabilidad Vectorial} = p((X_{1,}X_2, X_{3\ldots\ldots}X_n))$$

Que cumple con los axiomas:

$$p(X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots X_n) \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad \forall (X_{1,}X_2, X_{3\ldots\ldots}X_n) \in \left\{ \begin{array}{ccccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & x_{1,n_1} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & & & x_{n,n_n} \end{array} \right\}$$

$$\sum_{x_1=1}^{x_1=n1} \sum_{x_2=1}^{x_2=n2} \sum_{x_3=1}^{x_3=n3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{x_n=1}^{x_n=nn} p(X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots X_n) = 1$$

FUNCIÓN DE CUANTÍA DE PROBABILIDAD VECTORIAL

Denominada también Función de Cuantía de Probabilidad Acumulativa Conjunta, en el caso bidimensional, que será el único estudiado dado el nivel de la exposición, puede representarse mediante una **matriz marginada superior-derecha,** en cuyos márgenes se despliega el campo de definición de la variable vectorial; a cada margen se desarrolla el campo de definición de un elemento de la variable vectorial[328], en el caso que se indica la variable x_1 tiene *n1* elementos y la $x_{2,}$ *n2;*

$x_2 \diagdown x_1$	$x_{(1,1)}$	$x_{(1,2)}$	....	$x_{(1,n1)}$
$x_{(2,1)}$	$p(x_{(2,1)}, x_{(1,1)})$	$p(x_{(2,1),)}x_{(1,2)})$	....	$p(x_{(2,1)}, x_{(1,n1)})$
$x_{(2,2)}$	$p(x_{(2,2)}x_{(1,1)})$	$p(x_{(2,2)}, x_{(1,2)})$		
$x_{(2,n2)}$		$p(x_{(2,n2)}, x_{(1,2)})$		$p(x_{(2,n2)}, x_{(1,n1)})$

328 Una variable escalar que conforma la variable vectorial.

FUNCIÓN ACUMULATIVA CONJUNTA DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETA

Se define la Función de Distribución de Probabilidad Conjunta, como la acumulación de probabilidad vectorial, hasta un determinado punto dentro del campo de existencia de la variable aleatoria vectorial, en el caso bidimensional[329];

$$F_{XY}(X,Y) = p_{XY}(X \le x, Y \le y) = \sum_{X=m_X}^{X=x} \sum_{Y=m_Y}^{Y=y} p_{XY}(x,y)$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD MARGINAL DISCRETA

Se denomina Probabilidad Marginal, a la probabilidad de que ocurra un evento, sujeto a varias influencias aleatorias, en consideración únicamente a una de ellas[330].

En referencia a la distribución conjunta que se ha expresado (bidimensional), se denomina Función de Probabilidad Marginal Discreta, a **la función que permite la determinación de la probabilidad de un valor concreto de una variable, con prescindencia de los valores que hubiesen adquirido las demás.** En el caso bidimensional se trasunta en;

$$p_Y(y_k) = \sum_{i=1}^{i=n2} p(i,k) \qquad \forall \quad y_k \in \{y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots\ldots\ldots y_{n1}\}$$

$$p_X(y_k) = \sum_{i=1}^{i=n1} p(k,i) \qquad \forall \quad x_k \in \{x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_{n2}\}$$

La probabilidad marginal de un valor concreto de y_k, es igual a la suma de las probabilidades conjuntas en todo el recorrido de *X*, en la columna de y_k. La probabilidad marginal de un valor x_k, es la suma de las probabilidades conjuntas en todo el recorrido de Y, en la columna x_k. Por lo que en la columna en el margen derecho aparece la Función de Cuantía de X y en la línea del margen inferior la Función de Cuantía de Y,

$X \diagdown Y$	y_1	y_2	……..	y_{n1}	p_x
x_1	$p_{XY}(1,1)$	$p_{XY}(1,2)$	……..	$p_{XY}(1,n1)$	$p_x(1)$
x_2	$p_{XY}(2,1)$	$p_{XY}(2,2)$			$p_x(2)$
x_{n2}		$p_{XY}(n2,2)$		$p_{XY}(n2,n1)$	$p_x(n2)$

$$p_Y(y) = \quad p_y(1),\ p_Y(2)\, p_Y(n1)$$

329 Llamando a X_1,X y a X_2,Y.

330 Implica un seccionamiento (la determinación de un perfil) de la Función de Distribución de Probabilidad Conjunta.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONDICIONAL DISCRETA

Se denomina probabilidad condicional, a la probabilidad de ocurrencia de un evento, cuando se sabe que ha acontecido otro.

En el caso de una variable aleatoria bidimensional, la Función de Probabilidad Condicional Discreta, se obtiene a partir de la división de los elementos de la matriz de distribución conjunta por las probabilidades marginales cursantes en fila o columna según sea el caso, La Función Condicional respecto a *y*, se obtiene de dividir los elementos de la matriz de distribución conjunta, por las probabilidades marginales respectivas de *y*;

$X \diagdown Y$	y_1	y_2	……..	y_{n1}
x_1	$\frac{p_{XY}(1,1)}{p_y(1)}$	$\frac{p_{XY}(1,2)}{p_Y(2)}$	-	$\frac{p_{XY}(1,n1)}{p_Y(2)}$
x_2	$\frac{p_{XY}(2,1)}{p_y(1)}$	$\frac{p_{XY}(2,2)}{p_Y(2)}$		
x_{n2}		$\frac{p_{XY}(n2,2)}{p_Y(2)}$	….	$\frac{p_{XY}(n2,n1)}{p_Y(n1)}$

$$p_Y(y) = \quad p_y(1) \quad p_Y(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad p_Y(n1)$$

De forma análoga se puede lograr la Función de Distribución Condicional respecto a *x*, dividiendo los elementos de cada fila de la Distribución Conjunta por la respectiva probabilidad marginal de *x*.

ESPERANZA MATEMÁTICA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL DISCRETA

La Esperanza Matemática de una Función Vectorial Discreta (bidimensional), sujeta a un campo de probabilidad vectorial está definida por:

$$E(U(X,Y)) = \sum_{i=1}^{i=n2} \sum_{j=1}^{j=n1} U(x_i, y_j) p_{XY}(x_i, y_j)$$

Si la función U depende únicamente de una variable, *x* ***o*** *y* su esperanza matemática se puede encontrar utilizando las Funciones de Distribución Marginal.

$$E(Q(X)) = \sum_{i=1}^{i=n2} Q(x_i) p_x(x_i)$$

$$E(W(Y)) = \sum_{j=1}^{j=n1} W(y_j) p_y(y_j)$$

En particular, resultan de especial importancia:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=n2} x_i\, p_X(x_i) \qquad \textit{La Esperanza de X}$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{j=n1} y_j\, p_Y(y_j) \qquad \textit{La Esperanza de Y}$$

$$V(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{i=n2} x_i^2\, p_X(x_i)-E(X)^2 \qquad \textit{Variancia de X}$$

$$V(Y)=E((Y-E(Y))^2)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\sum_{j=1}^{j=n1} y_i^2\, p_Y(y_i)-E(Y)^2 \qquad \textit{Variancia de Y}$$

La Esperanza Matemática de X, señala el eje perpendicular al dominio de X[331], respecto al cual la variable aleatoria converge, en el plano señalado, su distribución. La Esperanza Matemática de Y, el otro eje perpendicular al eje de referencia referido, señala la otra convergencia distributiva directora[332].

COVARIANCIA Y COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE UNA VARIABLE VECTORIAL DISCRETA

Se mide el grado de la influencia estadística absoluta y directa (lineal) de los elementos de una variable aleatoria discreta, mediante su Covariancia. La Covariancia, CV(X,Y) es una medida en términos absolutos, de cuan relacionados, de forma lineal, se encuentran dos componentes de una variable aleatoria vectorial[333]; se denota por la expresión:

$$CV(X,Y)=E[(X-E(X)(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)=\sum_{i=1}^{i=n2}\sum_{j=1}^{j=n1} x_i y_j\, p_{XY}(x_i,y_j)-E(X)E(Y)$$

Se mide el grado de relación lineal (que uno de los componentes pueda ser representado mediante el otro bajo una combinación lineal) **entre dos componentes de una variable aleatoria discreta, mediante el Coeficiente de Correlación**;

$$\rho_{X,Y}=\frac{CV(X,Y)}{S(X)S(Y)}$$

El campo de existencia del coeficiente de correlación está en el intervalo [-1 +1]. Si el coeficiente de correlación se acerca a cero, la relación lineal[334], entre los componentes es débil, si se acerca a uno existe una correspondencia estadística lineal directa entre las variables, con mucha

331 O interpolado entre dos elementos de su dominio.

332 En el ámbito físico, si consideráramos que las distancias paralelas a los ejes señalados son los brazos de una torca, representarían los ejes de masas perpendiculares a los ejes de referencia del plano euclídeo.

333 Esta definición puede aplicarse a variables aleatorias vectoriales de más de dos dimensiones.

334 De la forma en la que los parámetros pertenecen a los Reales.

probabilidad y si se aproxima a -1, la correspondencia lineal es inversa entre las variables, con alta probabilidad.

INDEPENDENCIA DE LOS COMPONENTES DE UNA VARIABLE ALEATORIA VECTORIAL DISCRETA Y DISTRIBUCIÓN TEÓRICA DE INDEPENDENCIA

Las variables componentes de una Variable Aleatoria Vectorial Discreta, son independientes entre sí[335], si cada una de las probabilidades inherentes a su función de distribución conjunta, pueden escribirse como un producto de las probabilidades marginales de los elementos que componen el vector aleatorio. Si es posible escribir la función general de cuantía vectorial de probabilidad como un producto de las funciones marginales, entonces son independientes y no lo son en caso diverso.

$$p_{XY}(X,Y)=p_X(X)p_Y(X) \qquad o \qquad {}^{336}$$

$$p_{XY}(x_i,y_j)=p_X(x_i)p_Y(y_j) \qquad i\in\{1,2,3\ldots\ldots n2\}$$

$$j\in\{1,2,3\ldots\ldots n1\}$$

Bajo la asunción de que los componentes de la variable aleatoria vectorial son independientes, se puede construir una Distribución Conjunta teórica, denominada Distribución de Independencia, que refleje este supuesto. Cada uno de sus elementos será el producto de las probabilidades marginales de ambas variables (en la fila y columna respectivas);

$X \setminus Y$	y_1	y_2	....	y_{n1}	p_x
x_1	$p_X(1)p_Y(1)$	$p_X(1)p_Y(2)$	....	$p_X(1)p_Y(n1)$	$p_X(1)$
x_2	$p_X(2)p_Y(1)$	$p_X(2)p_Y(2)$	....	$\vdots$	$p_X(2)$
	$\vdots$			$\vdots$	
x_{n2}		$p_X(n2)p_Y(2)$		$p_X(n2)P_Y(n1)$	$p_X(n2)$

$$p_Y(y)= \quad p_Y(1), \quad p_Y(2)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad p_Y(n1)$$

Ilustración (1), En las tres regiones de Bolivia, la oriental, 1, los valles, 2, y la andina 3, se elige mediante un proceso aleatorio, una persona de la que además interesa su sexo hombre, 0, mujer, 1. La función de distribución de probabilidad conjunta, que se expresa, indica la probabilidad de cada uno de los vectores posibles;

335 Lo más acertado es aseverar que son Linealmente Independientes.

336 Esta proposición es equivalente a:

$x \backslash y$	0	1
1	0.1	0.2
2	0.4	0.08
3	0.02	0.2

a) Verificar que la distribución conjunta expuesta cumple con la axiomática de la probabilidad.
b) Encontrar e interpretar las funciones de probabilidad marginales.
c) Encontrar las funciones de probabilidad condicionales.
d) Encontrar E(X) y E(Y).
e) Encontrar V(X) y V(Y).
f) Encontrar la C(X,Y).
g) Encontrar el Coeficiente de Correlación entre las dos variables componentes.
h) Calcular p(X>Y).
i) Encontrar la Distribución Teórica de Independencia.

RESPUESTAS:

a) Como: 0.1+0.2+0.4+0.08+0.02+0.2=1 siendo los factores del lado izquierdo de la ecuación positivos, cumple con la convexitud y la positividad, que exige la axiomática de la probabilidad.

b)

$x \backslash y$	0	1	p_X
1	0.10	0.20	0.30
2	0.40	0.08	0.48
3	0.02	0.20	0.22
p_Y	0.52	0.48	

Existe una probabilidad de que un 30% de que el elegido sea de los llanos, un 48% de que sea del trópico y un 22% de los andes (sin considerar su sexo). Por otra parte, existe una probabilidad de un 52% de que sea hombre y un 48% de que sea mujer.

c) Distribución Condicional respecto al componente Y.

$x \backslash y$	0	1
1	$\frac{0.10}{0.30}$	$\frac{0.20}{0.30}$
2	$\frac{0.40}{0.48}$	$\frac{0.08}{0.48}$
3	$\frac{0.02}{0.22}$	$\frac{0.20}{0.22}$

=

$x \backslash y$	0	1
1	0.33	0.66
2	0.83	0.16
3	0.09	0.9

Distribución Condicional respecto al componente X.

$x \backslash y$	0	1
1	$\frac{0.10}{0.52}$	$\frac{0.20}{0.48}$
2	$\frac{0.40}{0.52}$	$\frac{0.08}{0.48}$
3	$\frac{0.02}{0.52}$	$\frac{0.20}{0.48}$

=

$x \backslash y$	0	1
1	0.19	0.41
2	0.76	0.16
3	0.03	0.41

d) Usando las marginales.

$$E(X)=(1)(0.30)+(2)(0.48)+3(0.22)=1.92$$
$$E(Y)=(0)(0.52)+(1)(0.48)=0.48$$

e) Usando las marginales.

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\left[(1)^2(0.30)+(2)^2(0.48)+(3)^2(0.22)\right]-(1.92)^2=4.2$$
$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\left[(0)^2(0.52)+(1)^2(0.48)\right]-\left[0.48\right]^2=0.2496$$

f)

$$C(X,Y)=E(X,Y)-E(X)E(Y)$$
$$=\left[(1)(0)(0.1)+(1)(1)(0.2)+(2)(0)(0.4)+(2)(1)(0.08)+(3)(0)(0.02)+(3)(1)(0.2)\right]-\left[(1.96)(0.48)\right]=+0.0192$$

Por lo que al ser positivo, es de esperar que entre los componentes exista una dependencia lineal directa.

g)

$$\rho_{XY}=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{+0.0192}{\sqrt{4.2}\sqrt{0.2496}}=0.01875$$

El bajo nivel del coeficiente de correlación indica que la relación lineal entre las variables es reducida e incluso que no existe.

h)

$$p(X>Y)=p_{XY}((1,0))+p_{XY}((2,0))+p_{XY}((2,1))+p_{XY}((3,0))+p_{XY}((3,1))$$
$$=0.1+0.4+0.08+0.02+0.2=0.8$$

i)

$x \backslash y$	0	1
1	0.156	0.144
2	0.249	0.230
3	0.114	0.105

VARIABLE ALEATORIA VECTORIAL CONTINUA

Si los componentes de la variable aleatoria vectorial, están definidos todos en segmentos de los reales, la variable es continua. **Una Variable Aleatoria Vectorial Continua es aquella**

x \ y	0	1
1	0.1	0.2
2	0.4	0.08
3	0.02	0.2

a) Verificar que la distribución conjunta expuesta cumple con la axiomática de la probabilidad.
b) Encontrar e interpretar las funciones de probabilidad marginales.
c) Encontrar las funciones de probabilidad condicionales.
d) Encontrar E(X) y E(Y).
e) Encontrar V(X) y V(Y).
f) Encontrar la C(X,Y).
g) Encontrar el Coeficiente de Correlación entre las dos variables componentes.
h) Calcular p(X>Y).
i) Encontrar la Distribución Teórica de Independencia.

RESPUESTAS:

a) Como: 0.1+0.2+0.4+0.08+0.02+0.2=1 siendo los factores del lado izquierdo de la ecuación positivos, cumple con la convexitud y la positividad, que exige la axiomática de la probabilidad.

b)

x \ y	0	1	p_X
1	0.10	0.20	0.30
2	0.40	0.08	0.48
3	0.02	0.20	0.22
p_Y	0.52	0.48	

Existe una probabilidad de que un 30% de que el elegido sea de los llanos, un 48% de que sea del trópico y un 22% de los andes (sin considerar su sexo). Por otra parte, existe una probabilidad de un 52% de que sea hombre y un 48% de que sea mujer.

c) Distribución Condicional respecto al componente Y.

$$\begin{array}{c|cc} x \backslash y & 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{0.10}{0.30} & \frac{0.20}{0.30} \\ 2 & \frac{0.40}{0.48} & \frac{0.08}{0.48} \\ 3 & \frac{0.02}{0.22} & \frac{0.20}{0.22} \end{array} = \begin{array}{c|cc} x \backslash y & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0.33 & 0.66 \\ 2 & 0.83 & 0.16 \\ 3 & 0.09 & 0.9 \end{array}$$

Distribución Condicional respecto al componente X.

$$\begin{array}{c|cc} x \backslash y & 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{0.10}{0.52} & \frac{0.20}{0.48} \\ 2 & \frac{0.40}{0.52} & \frac{0.08}{0.48} \\ 3 & \frac{0.02}{0.52} & \frac{0.20}{0.48} \end{array} = \begin{array}{c|cc} x \backslash y & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0.19 & 0.41 \\ 2 & 0.76 & 0.16 \\ 3 & 0.03 & 0.41 \end{array}$$

d) Usando las marginales.

$$E(X) = (1)(0.30) + (2)(0.48) + 3(0.22) = 1.92$$

$$E(Y) = (0)(0.52) + (1)(0.48) = 0.48$$

e) Usando las marginales.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left[(1)^2(0.30) + (2)^2(0.48) + (3)^2(0.22)\right] - (1.92)^2 = 4.2$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \left[(0)^2(0.52) + (1)^2(0.48)\right] - \left[0.48\right]^2 = 0.2496$$

f)

$$C(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y)$$

$$= \left[(1)(0)(0.1)+(1)(1)(0.2)+(2)(0)(0.4)+(2)(1)(0.08)+(3)(0)(0.02)+(3)(1)(0.2)\right] - \left[(1.96)(0.48)\right] = +0.0192$$

Por lo que al ser positivo, es de esperar que entre los componentes exista una dependencia lineal directa.

g)

$$\rho_{XY} = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{+0.0192}{\sqrt{4.2}\sqrt{0.2496}} = 0.01875$$

El bajo nivel del coeficiente de correlación indica que la relación lineal entre las variables es reducida e incluso que no existe.

h)

$$p(X > Y) = p_{XY}((1,0)) + p_{XY}((2,0)) + p_{XY}((2,1)) + p_{XY}((3,0)) + p_{XY}((3,1))$$

$$= 0.1 + 0.4 + 0.08 + 0.02 + 0.2 = 0.8$$

i)

x \ y	0	1
1	0.156	0.144
2	0.249	0.230
3	0.114	0.105

VARIABLE ALEATORIA VECTORIAL CONTINUA

Si los componentes de la variable aleatoria vectorial, están definidos todos en segmentos de los reales, la variable es continua. **Una Variable Aleatoria Vectorial Continua es aquella**

cuyo espacio muestral, puede ser descrito por un espacio vectorial continuo, de componentes numéricos pertenecientes a los Reales, conformado un hiperplano[337] que resulta de la intersección de segmentos en el conjunto numérico aludido[338].

Al ser infinito no numerables, los puntos que conforman el espacio en el cual se halla residenciado el campo de existencia de la variable, no es posible asignarles directamente (como en el caso de las variables vectoriales discretas) una probabilidad, por lo que a cada punto n dimensional, de forma unívoca, se le otorga una "Densidad de Probabilidad Conjunta". La densidad de probabilidad conjunta es la probabilidad de una vecindad adscrita al punto, cuando su radio tiende indefinidamente a cero;

$$f_{X1X2X3....Xn}(x_1,x_2,x_3.........x_n) = Lim_{r\to 0}\frac{p_{X1X2X3.........Xn}(x1+r,x2+r,x3+r..........xn)-p_{X1X2X3.........Xn}(x1,x2,x3..........xn)}{r}$$

Que cumple con la axiomática de la probabilidad;

$$f_{X1X2X3....Xn}(x_1,x_2,x_3.........x_n)\geq 0 \qquad \forall \qquad (x_1,x_2,x_3.......x_n)\in(R_{X1},R_{X2},R_{X3}.......R_{Xn})$$

Positividad

$$\int_{R_{X1}}\int_{R_{X2}}\int_{R_{X3}}..............\int_{R_{Xn}} f_{X1X2X3....Xn}(x_1,x_2,x_3..........x_n)dx_1\,dx_2\,dx_3..........dx_n = 1$$

Convexitud

En el caso de las variables aleatorias vectoriales continuas bidimensionales[339], las expresiones se simplifican notoriamente en:

$$f_{XY}(x,y)\geq 0 \qquad \forall \qquad (x,y)\in(R_X R_Y)$$

Positividad

$$\int_{R_X}\int_{R_Y} f_{XY}(x,y)dy\,dx = 1$$

Convexitud

Siendo los recorridos **singularmente conexos e independientes** es decir que cada recorrido, corresponde únicamente a un segmento y además un recorrido no influye en el otro[340], como ocurre en gran parte de los casos; la segunda propiedad axiomática puede expresarse:

$$\int_{mX}^{MX}\int_{mY}^{MY} f_{XY}(x,y)dy\,dx = 1$$ [341]

337 De la misma dimensión que los componentes de la variable.

338 Definición del Autor.

339 Que serán las únicas estudiadas en adelante.

340 El campo de existencia vectorial (El Recorrido Conjunto) es un rectángulo con los lados paralelos a los ejes que definen sus componentes.

341 En la que M_x, M_y, m_x, y m_y son los mayorantes y los minorantes de los intervalos respectivos.

La probabilidad de un acontecimiento en un subespacio singularmente conexo está dada por:

$$p(m_X\leq x\leq M_X\ ,\ m_Y(x)\leq y\leq M_Y(x)) = \int_{m_x}^{M_x}\int_{m_Y(x)}^{M_Y(x)} f_{XY}(x,y)dy\,dx$$

En el caso más general, en el cual se asume que el minorante y el mayorante de *y*, pueden depender de *x*. Si no ocurriera lo anterior, y los recorridos fueran independientes, el mayorante y el minorante de *y*, son simplemente constantes[342].

FUNCIÓN ACUMULATIVA CONJUNTA DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

La probabilidad de una superficie, cuyo origen de probabilidad, se encuentra en los minorantes de las componentes del vector de probabilidad y a partir del cual se suscita una superficie elíptica, de radios *x*, *y*, para cualquiera de esos valores dentro del campo de existencia de la variable aleatoria vectorial, se describe mediante una Función Conjunta de Distribución de Probabilidad;

$$F_{XY}(X,Y) = p_{XY}(X\leq x, Y\leq y) = \int_{m_X}^{x}\int_{m_Y}^{y} f_{XY}(x,y)dy\,dx$$

FUNCIONES MARGINALES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD[343]

La densidad de probabilidad marginal de un componente del vector aleatorio, es la densidad de probabilidad de uno de sus elementos, con prescindencia de lo que acontezca con los demás. Implica un corte perpendicular a un determinado valor en la función de densidad conjunta. En realidad, cada componente de la variable vectorial, representa por sí una variable aleatoria.

En el caso de las variables aleatorias bidimensionales las Funciones Marginales de Densidad de probabilidad, se denotan mediante las siguientes expresiones:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{XY}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y)dx$$

FUNCIONES CONDICIONALES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Se denomina Función de Densidad de Probabilidad Condicional, a la función que asigna a un argumento de la variable vectorial, una densidad de probabilidad, bajo el supuesto de que se conoce que los otros argumentos han acaecido en un

342 Se trastrocarían los conceptos expresados en este párrafo, respecto a las variables si se eligiera integrar previamente *x*.

343 Al expresar la palabra Densidad, se asume que la función es continua.

valor específico. Es la función de densidad de probabilidad que se establece, al haberse delimitado un subespacio de probabilidad por los otros argumentos.

El caso más sencillo de una Función de Densidad Condicional, ocurre en el vector aleatorio bidimensional, en el cual la función resulta de la ratio entre la función de densidad conjunta y la función marginal, prefijada en un valor concreto;

$$f_{Y/X}(y/x)=\frac{f_{XY}(x\ ,y)}{f_X(x\ )} \qquad \forall\ f_X(x)>0$$

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad \forall\ f_X(y)>0$$

ESPERANZA MATEMÁTICA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL SUJETA A UN CAMPO DE PROBABILIDAD VECTORIAL CONTINUO

La Esperanza Matemática de una función, vectorial definida en el campo de probabilidad que refiere la función de densidad de probabilidad conjunta. El valor al cual converge una determinada función en ese campo, en el caso bidimensional, está definida por:

$$E(U(X,Y))=\int_{R_X}\int_{R_Y}U(x,y)f_{XY}(x,y)dydx$$

Si la función **U,** depende exclusivamente de una de las variables aleatorias es posible encontrar su esperanza haciendo uso de las funciones de densidad de probabilidad marginales;

$$E(U(X))=\int_{m_x}^{M_x}U(x)f_x(x)dx$$

$$E(U(Y))=\int_{m_y}^{M_y}U(y)f_Y(y)dy$$

Son particularmente importantes[344]:

$$E(X)=\int_{m_x}^{M_x}x\ f_X(x)dx$$

$$E(X^2)=\int_{m_x}^{M_x}x^2 f_X(x)dx$$

$$E((X-E(X))^2)=V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

344 Debido a que mediante ellas se puede encontrar la desviación típica, el coeficiente de variabilidad, el coeficiente de sesgo y de curtosis.

$$E(X^3)=\int_{m_x}^{M_x}x^3\ f_X(x)dx$$

$$E((X-E(X))^3)=E(X^3)-3E(X)E(X^2)+2(E(X)^3)$$

$$E(X^4)=\int_{m_x}^{M_x}x^4 f_X(x)dx \quad E((X-E(X))^4=E(X^4)-4E(X)E(X^3)+6(E(X))^2E(X^2)-3(E(X))^4$$

$$CS(X)=\frac{E((X-E(X))^3)}{(E((X-E(X))^2)^{3/2}}$$

$$CC(X)=\frac{E((X-E(X))^4)}{(E((X-E(X))^2)^2}$$

El Coeficiente de Sesgo, CS(X), y el Coeficiente de Curtosis, CC(X), son medidas adimensionales[345], del sesgo y la curtosis de la variable, respectivamente.

COVARIANCIA Y COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA VECTORIAL CONTINUA

El grado de asociación estadística absoluta, dimensional, entre dos elementos que integran un vector estocástico[346], es decir, que considera la significación de las unidades en las que se expresan las variables consideradas, se mide mediante la Covariancia;

$$CV(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=\int_{R_X}\int_{R_Y}xy\,f_{XY}(x,y)dydx-(\int_{R_X}x\,f_X(x)dx)(\int_{R_Y}x\,f_Y(y)dy)$$

El grado de asociación estadística relativa[347], adimensional, entre dos componentes de una variable aleatoria vectorial continua se mide mediante su coeficiente de correlación, definido mediante la expresión:

$$\rho_{X,Y}=\frac{CV(X,Y)}{S(X)S(Y)}$$

INDEPENDENCIA DE LOS COMPONENTES DE UNA VARIABLE ALEATORIA VECTORIAL CONJUNTA

Dos componentes de una variable aleatoria vectorial continua son linealmente independientes, si su coeficiente de correlación es igual a cero[348]. La anterior expresión, equivale a afirmar que su función de densidad de probabilidad conjunta, se puede expresar para cualquiera de los

345 Carentes de unidades.

346 Cuando se asume que todos los demás permanecen constantes; "Ceteris Paribus".

347 Bajo el supuesto de linealidad.

348 Para que se de lo anterior, evidentemente su covariancia debe ser igual a cero.

puntos que conforman el espacio vectorial, como un producto de las respectivas funciones de densidad de probabilidad marginales, en el caso de que los campos de definición de las variables intervinientes estén simplemente conectados[349];

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \qquad \forall\ x\in[m_X \quad M_X]^{350}$$
$$y\in[m_Y \quad M_Y]$$

CAMBIO DEL CAMPO VECTORIAL DE DEFINICIÓN DE UNA VARIABLE VECTORIAL CONTINUA BIDIMENSIONAL

Dada una superficie bidimensional en la cual se encuentra definida una variable aleatoria (X,Y), con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x,y)$; si se transforma ese espacio mediante las ecuaciones:

$$U=\phi(X,Y)$$
$$V=\vartheta(X,Y)$$

Sistema en el cual la variable vectorial, en su forma original puede ser representada por el sistema:

$$X=\phi^{-1}(U,V)$$
$$Y=\vartheta^{-1}(U,V)$$

La función de densidad conjunta de (U,V), en el nuevo campo de probabilidad definido en la superficie (U,V), está dado por:

$$g_{UV}(u,v)=f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

El segundo elemento del lado derecho de la ecuación, es un Jacobiano de Transformación (en valor absoluto) definido por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left|\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\phi^{-1}(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\vartheta^{-1}(u,v)}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\phi^{-1}(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial\vartheta^{-1}(u,v)}{\partial v}\end{matrix}\right|$$

Ilustración (1), Se plantea que en Bolivia, de forma estocástica, la preferencia por un partido político es inversamente proporcional a la edad del ciudadano en capacidad de votar, medida en años "X", y directamente proporcional a la región en la que vive, medida en altura, en metros, sobre el nivel del mar "Y". La primera definida en el rango de [18 65] y la segunda en el correspondiente, [150 4.000].

349 El campo de existencia de un elemento no dependa del otro y viceversa. Si ocurriera lo anterior, a pesar de poderse expresar la función de densidad de probabilidad conjunta, como un producto de las funciones marginales, es posible que las variables sean dependientes.

350 Es equivalente a que: $F_{XY}(x,y)=F_X(x)\,F_Y(y)$, bajo las condiciones que se han expuesto.

a) Proponer en abstracto el modelo matemático que represente esta relación estocástica.

b) Utilizando la Axiomática de la Probabilidad, encontrar en concreto la relación propuesta.

c) Calcular la probabilidad de que los adherentes al partido político, sean mayores de 50 años y además vivan en altitudes comprendidas entre los 1.000 y 2.500 metros sobre el nivel del mar.

d) Encontrar las funciones de densidad de probabilidad marginal.

e) Encontrar las funciones de densidad condicional.

f) Encontrar la Covariancia.

g) Encontrar el Coeficiente de Correlación.

RESPUESTAS:

a) El modelo matemático en abstracto que expresa lo descrito, puede ser objetivado mediante la función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y)=k\frac{y}{x} \qquad En \quad x\in[18 \qquad 65]$$
$$y\in[150 \qquad 4000]$$

b) La forma abstracta se hace concreta, mediante la aplicación de las propiedades que determina la axiomática de probabilidad. En primera instancia, que k es un número positivo y con más precisión que su valor está determinado por el cumplimiento del axioma de convexitud de la variable aleatoria vectorial:

$$1=\int_{18}^{65}\int_{150}^{4000}k\frac{y}{x}\,dy\,dx=k\int_{18}^{65}\left[\frac{y^2}{2x}\right]_{150}^{4000}dx=\frac{k}{2}\int_{18}^{65}[16000000-22500]\frac{1}{x}\,dx$$

$$=(7988750)k\int_{18}^{65}\frac{1}{x}dx=(7988750)k[\ln x]_{18}^{65}=k(7988750)(4.174-2.890)=k(10257678.92)$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{10257678.92}$$

c) El problema planteado se reduce a encontrar la probabilidad entre los rangos establecidos.

$$p_{XY}(50\le x\le 65;\ 1000\le y\le 2500)=\frac{1}{10976542.5}\int_{50}^{65}\int_{1000}^{2500}\frac{y}{x}\,dy\,dx$$

$$=\frac{1}{10257678.92}\int_{50}^{65}\left[\frac{y^2}{2x}\right]_{1000}^{2500}dx=\frac{1}{10257678.92}\int_{50}^{65}\left[\frac{6250000-1000000}{2}\right]\frac{1}{x}\,dx$$

$$=0.2559\int_{50}^{65}\frac{1}{x}dx=0.2559[\ln x]_{50}^{65}=0.2559[\ln 65-\ln 50]=(0.2559)(0.2623)=0.0671$$

d)

$$f_X(x)=k\int_{150}^{4000}\frac{y}{x}dy=\frac{1}{10257678.92}\left[y^2\right]_{150}^{4000}\frac{1}{2x}=\frac{(16000000-22500)}{2(10257678.92)}\frac{1}{x}=\frac{0.7788}{x}$$

$$f_Y(y)=k\int_{18}^{65}\frac{y}{x}dx=\frac{1}{10257678.92}\left[\ln x\right]_{18}^{65}y=\frac{\left[\ln 65-\ln 18\right]}{10257678.92}y=0.000000125y$$

e)

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{\frac{1}{10257678.92}\frac{y}{x}}{0.0000000125y}=\frac{0.779}{x}$$

$$f_{Y/X}(y/x)=\frac{\frac{1}{10257678.92}\frac{y}{x}}{\frac{0.7788}{x}}=0.000000125y$$

f) De los dos anteriores incisos se observa que la función de densidad marginal, de ambos argumentos, es igual a su función de densidad condicional, por lo que son linealmente independientes y su covariancia es igual a cero.

g) En atención al argumento del anterior inciso, el coeficiente de correlación también es cero. Además de la revisión de la función de densidad de probabilidad conjunta es fácil apreciar que esta se puede expresar como un producto de las funciones marginales de los argumentos, en todo su campo de existencia; lo que corrobora lo afirmado en éste y el anterior inciso.

Apéndice I

UNA NOCIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y DE LOS MÉTODOS DE ENUMERACIÓN Y CONTEO

NOCIONES DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS[351]

El concepto de conjunto, que originalmente fue acuñado por Cantor a finales del siglo XVIII, trasciende a la teoría matemática y posibilita una comprensión más profunda de cualquier clase de realidad, es especialmente útil en la Ciencia Política, en la cual las relaciones entre los componentes políticos, son especialmente complejas.

Definición del Término "Conjunto".- Un conjunto es la reunión de elementos en atención a una razón de conjunción. Es decir, que no es cualquier reunión de elementos, sino sólo aquella que puede ser comprendida mediante un fundamento de pertenencia. Los elementos de un conjunto no son entes yuxtapuestos (amontonados), sino existen de forma correlacionada por la determinación de una ley (matemática, física o social).

Un conjunto es una sub delimitación de un Espacio Universal, (aquel que contiene todos los elementos de un género). Es un segmento propio o impropio[352] de un universo, la comprensión, por delimitación, de una de sus partes.

Un elemento es una entidad específica. Es la forma en la cual una razón de conjunción, un concepto genérico (generador) se hace concreto.

351 Se exponen definiciones que más de darle relevancia matemática a este importante concepto, destacan su significación filosófica.

352 Un segmento propio es aquel que contiene al menos un elemento menos que el conjunto universo y un segmento impropio es aquel cuyos elementos son los mismos del universo.

Conjunto Universal, Conjunto [353]Vacío y Conjunto Complementario.- La reunión de todos los elementos de un género, el propio género, establecido por delimitación conceptual de su significado, constituye el conjunto universal, también denominado Espacio Universal.

Cuando a pesar de ser comprendida una razón de conjunción, se la delimita mediante un segmento del espacio universal y no se involucra en esta delimitación a ningún elemento, se tiene por definido en ese espacio, un Conjunto Vacío; un conjunto que no contiene algún elemento[354]. Los Conjuntos Vacíos de distintos géneros son cualitativamente diferentes entre sí.

El Conjunto Complementario de un conjunto A, o simplemente el Complemento de A, A^c, es la reunión de elementos que siendo miembros del conjunto universal, no pertenecen a un conjunto específico, en este caso no pertenecen a A. El conjunto complementario del Conjunto Universo es el Conjunto Vacío y recíprocamente el Conjunto Complementario del Vacío es el Universo.

CONJUNTOS NUMERABLES[355], NO NUMERABLES, FINITOS E INFINITOS

- Un conjunto es Numerable, si sus elementos se pueden contar; hacer corresponder biyectivamente (uno a uno) con los elementos del conjunto de los números naturales. En caso diverso, el conjunto es No Numerable.
- Cuando siendo numerable un conjunto, sus elementos se suceden de forma indefinida, el conjunto es infinito.
- En el caso de que la sucesión sea Numerable (acotada), el conjunto es finito.

NOTACIÓN

- Se simboliza un conjunto mediante letras mayúsculas y los elementos que lo integran mediante letras minúsculas.
- Existen tres maneras de representar un conjunto:

POR COMPRENSIÓN.- Mediante una sentencia que, expresa la razón de pertenencia al conjunto. Cual es la condición para que una entidad pertenezca a un conjunto.[356]

$x / x \in A, \ si \ x \ es \ q$

Se lee *el elemento x,* ***tal que*** *el elemento x,* ***pertenece*** *al conjunto A, si es que el elemento x, tiene la característica* ***q.***

353 Así como lo son los ceros de diferentes sistemas numéricos.

354 Una razón de conjunción truncada en su posibilidad de hacerse concreta.

355 Es diferente el significado de Conjunto Numerable y de Conjunto Numérico.

356 Esta es la única forma de expresar los conjuntos infinitos no numerables.

En el caso de los conjuntos numéricos, la Razón de Pertenencia, por el axioma de tricotomía[357] se reduce a la acotación, en un conjunto numérico universal[358], del elemento genérico ***x;***

$a \leq x \leq b \ o \ a < x < b \ o \ a < x \leq b \ o \ a \leq x < b$

Si el conjunto es un segmento de los números reales, se lo puede representar, por Intervalos de Pertenencia;

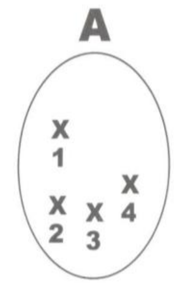
$x \in [a \ b] \ o \ x \in]a \ b[\ o \ x \in]a \ b] \ o \ x \in [a \ b[$

POR EXTENSIÓN.- Mediante la enunciación exhaustiva de sus elementos, contenida entre el signo de agrupación "llave", en la cual se los presenta separados por comas. Esta posibilidad sólo es válida para los Conjuntos Numerables Finitos.

$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n\}$

Se lee, los elementos que pertenecen al conjunto ***A*** son x_1, x_2, x_3 y x_n

POR DIAGRAMAS DE VENN-EULER.- Círculos u otros recintos cerrados, sobre cuyo ápice se nomina el conjunto y en cuyo interior se insertan sus elementos.



SUBCONJUNTOS

Cualquier reunión de elementos de un conjunto, forma un Subconjunto del referido. De forma análoga a la Razón de Conjunción, existe para su origen una Razón de Subconjunción, que permite diferenciar los elementos de un subconjunto de los restantes del conjunto.

Un subconjunto es propio si al menos es diferente en uno de sus elementos al conjunto que le da origen, y es impropio si todos sus elementos son los mismos del conjunto origen, en este caso el conjunto origen y el subconjunto son idénticos. Por lo que se puede afirmar que dos conjuntos son idénticos, solamente en el caso de que todos sus elementos sean iguales:

$A = B \Leftrightarrow \forall x, x \in A, x \in B$

357 Un número sólo puede ser o mayor, o menor, o igual a otro.

358 Que puede ser el conjunto de los Números Naturales, Enteros, Racionales, Reales, etcetera.

Se denota un subconjunto, mediante la misma letra mayúscula que representa el conjunto origen a la que se agrega un subíndice:

$A_w \subset A$ $\quad$ $A_w \subseteq A$

La primera expresión se lee, $\mathbf{A_w}$ es un subconjunto propio de **A** y la segunda, $\mathbf{A_w}$ es un subconjunto impropio de **A.**

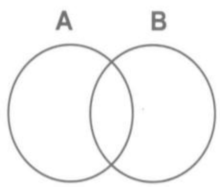
El total de subconjuntos, incluido el subconjunto vacío, que se pueden formar con los k elementos de un conjunto, es $\mathbf{2^k}$. El conjunto que tiene por elementos a todos estos subconjuntos se llama **Conjunto Potencia de A.**

OPERACIONES FUNDAMENTALES ENTRE CONJUNTOS

Las operaciones fundamentales, que tienen por factores dos o más conjuntos son la Unión, la Intersección, la Diferencia y la Diferencia Simétrica.

Se unen dos conjuntos cuando se forma, como resultado, un nuevo conjunto de modo que sus elementos son de uno o de otro de los conjuntos factores (de cualquiera o de ambos conjuntos):

$A \bigcup B : x / x \in A \vee x \in B$

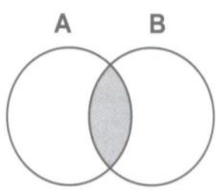


[AUB]

Se lee, **x tal que x pertenece al conjunto A o x pertenece al conjunto B.**

Se intersectan dos conjuntos cuando se forma, como resultado, un nuevo conjunto de modo que sus elementos son de uno y también del otro de los conjuntos factores (sus elementos están presentes en ambos conjuntos).

$A \bigcap B : x / x \in A \wedge x \in B$

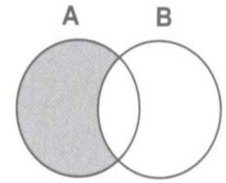


[A∩B]

Se lee, **x tal que x pertenece al conjunto a y x pertenece al conjunto B.**

Se diferencian dos conjuntos, cuando se forma como resultado un nuevo conjunto de tal manera que sus elementos están en el primer conjunto, pero no están en el segundo.

$A - B : x / x \in A \wedge x \notin B$

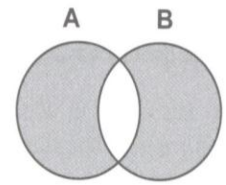


[A - B]

Se lee, **x tal que x pertenece a A y x no pertenece a B.**

Se diferencian simétricamente dos conjuntos, sí se forma un nuevo conjunto bajo la condición de que sus elementos pertenezcan únicamente a uno de los conjuntos, pero no a ambos[359].

$A \Delta B : x / (x \in A) \vee (x \in B) \wedge (x \notin A \bigcap B)$



[A Δ B]

Se lee; **x tal que x pertenece al Conjunto A o x pertenece al conjunto B y x no pertenece a la intersección de los conjuntos A y B.**

CARDINALIDAD DE LA UNIÓN DE DOS CONJUNTOS NUMERABLES

Un conjunto es numerable si se pueden contar sus elementos, es decir si se los puede hacer corresponder biyectivamente, con los primeros elementos del conjunto de los números naturales.

Si se unen dos conjuntos numerables, el número de elementos que contiene la unión, (la Cardinalidad de la Unión) es la suma de los elementos de cada conjunto factor menos el número de elementos que contiene la intersección[360]:

$\#(A \bigcup B) = \# A + \# B - \#(A \bigcap B)$

359 Evidentemente esta operación no es conmutativa.

360 Únicamente en el caso de que los conjuntos sean disjuntos y por tanto el número de elementos de su intersección se haga cero, la cardinalidad de la unión se corresponde a la suma aritmética.

PROPIEDADES PRINCIPALES DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES ENTRE CONJUNTOS

$A \bigcup B = B \bigcup A$	*Conmutatividad*
$A \bigcap B = B \bigcap A$	
$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$	*Asociatividad*
$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$	
$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$	*Distributividad*
$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$	
$A \bigcup \varphi = A$	*Elemento Neutro*
$A \bigcap U = A$	
$A \bigcup U = U$	*Elemento Absorvente*
$A \bigcap \varphi = \varphi$	
$A \bigcup A^C = U$	*Complementariedad*
$A \bigcap A^C = \varphi$	
$(A \bigcup B)^C = (A^C \bigcap B^C)$	*Leyes de Morgan*
$(A \bigcap B)^C = (A^C \bigcup B^C)$	

PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

Se Particiona un conjunto, cuando se lo divide en subconjuntos que no se intersectan entre sí y cuya unión lo reproduce es decir:

$A_i \cap A_j = \varphi \; para \; i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{i=p} A_i = A$

En la que **p** representa el número de partes en las que se ha seccionado.

Apéndice II

VECTORES

Un Conjunto Numerable Finito, representado mediante paréntesis,, cuyos elementos se encuentran ordenados, define un **Vector**, siempre que se cumplan con las siguientes propiedades:

$aV = (av_1, av_2, av_3 \ldots\ldots\ldots av_{n)}$

$V + W = (v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_n) + (w_1, w_2, w_3 \ldots\ldots w_n) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \ldots\ldots v_n + w_n)$

La primera indica que la multiplicación de un escalar ***a*** por el vector, equivale a multiplicar cada uno de sus componentes por el indicado escalar y la segunda que la suma de dos vectores, equivale a sumar sus componentes.

La dimensión de un vector es igual a su número de elementos. Es decir, **un vector es un conjunto finito numerable cuyos elementos se encuentran ordenados[361].**Un vector, representa un punto en un Espacio Euclídeo[362], congruente con su dimensión, por lo que dos vectores son mutuamente congruentes cuando son de la misma dimensión.

Magnitud Vectorial (Norma Vectorial) y Sentido Vectorial.- Se puede hacer corresponder un vector a una **magnitud con dirección y sentido**, el tamaño del vector, también denominado "Norma Vectorial" es la distancia del punto que representa el vector al origen del Espacio Euclídeo;

$$|v| = NV = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots\ldots\ldots v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}$$

361 En el caso de un conjunto no ordenados la Razón de Conjunción, hace que los elementos estén simplemente presentes, en el caso de los vectores la Razón de Conjunción hace que los elementos esten presentes y ordenados.

362 Un Espacio que es generado por ejes perpendiculares entre sí.

Se define el Tamaño, Magnitud o Norma de un vector de dimensión n, como su distancia al origen de coordenadas del Espacio Euclídeo en el que se encuentra y, su sentido[363], por los n-1 ángulos que forma con los ejes del sistema de coordenadas[364].

En el gráfico se muestra la norma y el sentido de un vector de dos dimensiones.

SUMA DE DOS VECTORES

Dos vectores de la misma dimensión se suman, sumando sus componentes, en cada uno de los ejes del espacio cartesiano:

$$v+w=(v_1,v_2,v_3.........v_n)+(w_1,w_2,w_3.........w_n)=(v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3.........v_n+w_n)$$

El resultado es un nuevo vector de la misma dimensión, cuyo sentido está entre los sentidos de los dos vectores factores, se aproxima más al sentido del vector mayor, en cuanto mayor sea la diferencia de su norma con la del vector menor.

DIFERENCIA DE DOS VECTORES

Un vector v, se diferencia de otro vector w, de la misma dimensión, si a los componentes de v, se restan los respectivos componentes de w:

$$v-w=(v_1,v_2,v_3.........v_n)-(w_1,w_2,w_3.........w_n)=(v_1-w_1,v_2-w_2,v_3-w_3.........v_n-w_n)$$

El resultado es un vector que se inicia en la finalización del vector minuendo y que finaliza en la finalización del vector sustraendo.

PRODUCTO PUNTO (Producto Interno)

Una de las más sencillas operaciones vectoriales es el Producto Punto, definida como la suma de los productos de los componentes correspondientes de dos vectores congruentes[365];

$$pp(v,w)=(v_1,v_2,v_3.......v_n).(w_1,w_2,w_3.......w_n)=(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3.......v_nw_n)=\sum_{i=1}^{i=n} v_iw_i$$

El producto punto es también igual al producto de las normas vectoriales de los vectores factores, por el coseno del ángulo que forman, por lo que el ángulo es:

$$Ar\cos(v,w)=Ar\cos\left(\frac{v.w}{|w||v|}\right)$$

363 Dirección Específica.

364 El último ángulo está determinado por los anteriores. Es linealmente dependiente de los anteriores.

365 De la misma dimensión.

La Proyección ortogonal (que forma un ángulo de $(\pi/2)radianes$ [366]de un vector v sobre otro vector congruente w en consecuencia es:

$$\Pr(v\,sobre\,w)=\frac{v.w}{\|w\|^2}w$$

Y la Componente de v ortogonal a w

$$Com(v\,ortogonal\,a\,w)=v-\frac{v.w}{\|w\|^2}w$$

APLICACIÓN DE LA TEORÍA VECTORIAL EN LA CIENCIA POLÍTICA

ESPACIO DE LA VALORACIÓN SOCIAL.- El sentido de la valoración social, lo que se aprecia como bueno, puede descomponerse en varios factores, los más importantes, sin que la enumeración sea restrictiva son:

a) La disposición de servicios básicos, salud, educación, agua potable, alcantarillado, comunicación y vivienda.
b) Un ingreso que permita comprar una canasta de consumo adecuada.
c) La Posibilidad de expresar libremente las ideas.
d) La distribución equilibrada del ingreso nacional.
e) La posibilidad de poder materializar las convicciones respecto a la vida.
f) La libertad religiosa.
g) La seguridad ciudadana.

Es decir, un conjunto de factores determinan que los miembros de una comunidad sean felices y aprecien a las autoridades que conforman su gobierno.

Entre los componentes fundamentales del bien social, se aprecia claramente que en la realidad existe oposición, es decir, que la realización de alguno de ellos pudiera afectar la de otros. Así por ejemplo, pudieran considerar los religiosos que la posibilidad de los homosexuales de realizar su convicción respecto a la vida afecta el desarrollo de sus convicciones, o que el utilizar el peculio público en la seguridad ciudadana, pudiera ocasionar una reducción del ingreso per cápita. Las situaciones reales que se han descrito, en general, indican la profunda imbricación entre los Valores Fundamentales, sin embargo, para poder entender los Valores Sociales Complejos (el bien social bajo una cierta perspectiva), se requiere asumirlos como independientes. Es decir, que el bien social resulta de una composición de ellos. De la forma más sencilla se asume que el **"Bien Social" concebido como un Valor Social Complejo, resulta de la composición lineal de valores fundamentales.**

366 Noventa Grados en la escala de medición de los ángulos Sexagesimal.

$$Bien\ Social = \sum_{i=1}^{i=q} k_i\ Valor\ Fundamental_i\ /\ \sum_{i=1}^{i=q} k_i = 1$$

Expresión en la que k_i representa la importancia que la sociedad le otorga a un valor fundamental específico, i.

CONCEPCIÓN TRIDIMENSIONAL DEL BIEN SOCIAL

En vista de que la comprensión de una teoría, requiere que, en abstracto, se desarrollen las suficientes simplificaciones. Se acepta que el bien social está compuesto por tres componentes fundamentales y son:

1) La disponibilidad de suficientes bienes materiales públicos y privados para los componentes de la sociedad.
2) La libertad de los individuos en sus actividades sociales, entendida como la posibilidad de expresarse plenamente, sin que una forma particular de expresión perjudique a otros componentes sociales.
3) La Justicia Social, entendida como la distribución equilibrada de los bienes sociales, patrimoniales y no patrimoniales[367].

Esta reducción, pedagógicamente necesaria, además de la asunción de la independencia de los valores fundamentales, es decir que además de fundamentales se los concibe como primarios. Nos permite componerlos en un Espacio Cartesiano Tridimensional y, entonces aplicar en el los criterios vectoriales que se han explanado.

En esta base epistemológica, el espacio del bien social, resulta de la coordinación ortogonal de tres ejes, cada uno de los cuales representando uno de los componentes fundamentales detallados. Además, se asume, para mejor comprensión, que la coordinación entre ellos es dextrosa, es decir que si asumimos que el índice y el dedo mayor, de una mano derecha, cuando se encuentran en un ángulo de noventa grados[368], representan dos ejes en su proyección positiva, el pulgar, en el mismo ángulo con el plano conformado, representa la proyección positiva del tercer eje.

CAMPO POLÍTICO BIDIMENSIONAL (Plano de Fuerzas Políticas).- Sin embargo de lo expuesto en el punto anterior, en aras de la comprensión la teoría política asume que los componentes relevantes del bien social son la justicia y la libertad[369], "Valores Sociales Puros", generándose de esta forma un **Plano Político**, que resulta de la composición ortogonal de dos ejes que representen estos valores. Sin embargo, como en el Espacio del Bien

367 Una medida instrumental (mediante la cual se tiene una buena idea de la que realmente se busca conocer) es el Índice de Gini.

368 $(\pi/2)radianes$

369 Arnold Brecht, TEORÍA POLÍTICA.

Social, se puede extender este concepto a un campo en el cual también sean importantes otros componentes como El Crecimiento Económico, La Conservación Ambiental, La Diferencia Cultural, La Preeminencia del Estado Sobre Otros, etcétera, produciéndose en este caso un Campo Político (Espacio Político) como consecuencia de la composición ortogonal de **n** ejes en los que cada uno de los componentes represente un valor social relevante[370]. Pudiera ocurrir que lo que para una fuerza política es un valor social relevante, para otra representa un disvalor, por lo que en la representación de un campo político se utilizan los ejes completos de un espacio euclídeo.

Cada eje del campo político es una ideología elemental (pura) que ulteriormente no puede ser descompuesta. Es de esperar que no existan realmente fuerzas políticas con ideología pura sino más bien que esta sea el resultado de la composición en distinto grado de varias ideologías políticas elementales.

En resumen se puede afirmar que un Campo Político es el locus ideológico, **espacio euclídeo resultante de la composición ortogonal de ideologías puras,** en el cual se representan las fuerzas políticas.

DIFERENCIA ENTRE EL ESPACIO DEL BIEN SOCIAL Y EL ESPACIO POLÍTICO.- Los puntos expuestos anteriormente, nos inducen a hacer expresa y clara la diferencia entre el Espacio del Bien Social y el Espacio Político, al respecto de forma sucinta afirmaremos que el Espacio del Bien Social, muestra distintas combinaciones de bienes que aseguran un determinado nivel de bienestar, sobre el se puede definir una función de bienestar social y analizar relaciones de intercambio de bienes[371]. El equilibrio social basado en el equilibrio económico de una sociedad que tiene por fundamento el adecuado intercambio de bienes entre sus componentes. El Espacio Social es un espacio cartesiano en el que se representan distintas canastas de bienes y su lejanía al origen, significa un mejor estado de satisfacción social[372]. En el Espació Político, en el mismo plano cartesiano señalado, se representan ideologías políticas, los ejes no representan distintas cantidades de bienes sino indican una determinada ideología, en la cual se orienta, vectorialmente, una cantidad de recursos, cuya composición (al menos en una primera instancia) no tiene significación en relación a la ideología de las fuerzas políticas que se representa.

370 Resulta Evidente que no pueden representarse de forma gráfica Campos Políticos que excedan la tercera dimensión, es decir estén compuestos por más de tres valores sociales relevantes.

371 El estudio de las consecuencias de la distinta disponibilidad de bienes por una sociedad y las condiciones de su intercambio, lo desarrolla la "Economía del Bienestar" en la que son notables los trabajos de Pigou, Pareto y Edgeworth.

372 En un Espacio del Bien Social se construyen funciones de Utilidad Social, cuyo estudio escapa a los alcances de la presente obra.

La Ciencia Política estudia la interacción de las Fuerzas Políticas en la sociedad. Al ser las fuerzas políticas, magnitudes direccionales, vectores, no es posible la comprensión de la ciencia política sin el conocimiento al menos elemental de la teoría vectorial y, el concepto inherente de Campo de Fuerzas. En los anteriores capítulos, con las suficientes simplificaciones se ha intentado emular este estudio, en aras de la finalidad pedagógica, en esta parte, se intenta formalizar los conceptos a los que se ha dado supra un acercamiento intuitivo.

Fuerza Política (en sentido estricto).- Es un vector n dimensional en el cual n representa los distintos componentes relevantes del bien social.

La Norma Vectorial, denominada también magnitud vectorial, representa los recursos que dispone la Fuerza Política. Que en una parte anterior del texto fueron escindidos en tangibles e intangibles[373]. Es la distancia del extremo de la fuerza política (la punta de la saeta que representa el vector) al origen del espacio euclídeo.

La Ideología Política esta representada por los n Cosenos Directores[374] que permiten el posicionamiento del vector en el Campo Político.

Un cambio de dirección vectorial, implica necesariamente el cambio de los cosenos directores que posicionan en el Campo Político a la Fuerza Política.

Cuando una fuerza política se expande (aumenta en su materialidad) generalmente se reposiciona en el Campo Político. En el caso de que se expanda sin que cambien su ideología se denomina (Expansión Pura[375]).

En el caso de que cambien los cosenos directores de una fuerza política se denomina **"Viraje Ideológico".** El viraje ideológico es puro, cuando se produce sin una variación de la norma vectorial (de los recursos de la fuerza política).

373 A los recursos tangibles se los dividió en humanos y económicos y, a los intangibles en Conocimientos Técnicos e Ideas de Fundamentación.

374 Un Coseno Director, indica el ángulo que forma el vector con un eje específico del Campo Político.

375 Si se contrae se denominará Contracción Pura.

Apéndice III

MÉTODOS DE ENUMERACIÓN

INTRODUCCIÓN

Factorial de un Entero Positivo y del Cero

Se define por el Factorial de un Número Entero Positivo, al producto del número por todos los números enteros positivos que le son antecedentes;

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)..................(1)$

Se define que el factorial de cero es uno;

$0! = 1$

Número Combinatorio

El número de maneras diferentes en las que se pueden ordenar n elementos colocados en m posiciones, recibe el nombre de número combinatorio, es el ratio del factorial de n entre el factorial de m, multiplicado por el factorial de la diferencia n-m;

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3).........(n-m+1)}{m!}$$

Las principales propiedades del número combinatorio son:

1)

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

2)

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

3)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

La aplicación más conocida del número factorial es en el Binomio de Newton;

DEFINICIÓN DE MÉTODO DE ENUMERACIÓN Y MÉTODO DE CONTEO

Se denomina método de enumeración, al procedimiento matemático que permite establecer la cardinalidad de los arreglos[376] diferentes de n elementos, colocados en m posiciones, bajo una determinada regla.

Se denomina método de conteo albaremo que permite contar las maneras diferentes en las que se puede lograr un determinado resultado, mediante la composición de diferentes factores.

REGLAS PRINCIPALES DE LA ENUMERACIÓN

Regla de la Adición (Composición en Paralelo)

Si un procedimiento se puede lograr de dos formas diferentes y excluyentes entre sí, cada una a su vez, con los modos de hacer respectivos n_1 y n_2, el número total de posibilidades en el que se puede lograr el resultado es igual a la suma de las formas independientes de hacerlo;

$$n_T = n_1 + n_2$$

Regla de la Multiplicación (Composición en Serie)

Si un procedimiento complejo está compuesto de dos procedimientos consecuenciados, que pueden lograrse respectivamente de n_1 y n_2 formas diferentes, el número de maneras distintas en las que puede lograrse el procedimiento complejo, es igual al producto de las formas en las cuales pueden ocurrir sus procedimientos factores;

$$n_T = n_1 n_2$$

PRINCIPALES MÉTODOS DE ENUMERACIÓN

Variación Sin Repetición

Una Variación sin repetición[377] es una colección de arreglos de n elementos colocados en m posiciones de modo tal que cada uno de los arreglos, difiere de cualquiera de los otros , al menos en tener un elemento en distinta posición. La cardinalidad de una variación es el ratio entre el

376 Formas específicas de orden.

377 Sin que en alguno de los arreglos se repita una o más veces alguno de los elementos.

factorial del número de elementos dividido entre el factorial de la diferencia entre el número de elementos y el de posiciones;

$$V_m^n = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-m+1)$$

Permutación

Una permutación es una Variación Sin Repetición en la cual el número de elementos es igual al número de posiciones en las que éstos se colocan. El total de permutaciones de n elementos está dada por el factorial de n;

$$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Variación Con Repetición

Una Variación Con Repetición, es una reunión de arreglos, que se forman con n elementos colocados en m posiciones de forma tal que, cualquiera de los elementos puede aparecer hasta m veces en el arreglo[378]. El total de arreglos bajo esa ley está dado por el número de elementos elevado al número de posiciones;

$$VR = n^m$$

Combinaciones

El conjunto combinatorio, contiene todos los arreglos de n elementos, tomados en grupos de tamaño m, de forma que cada grupo es diferente a los demás, porque sin importar el orden el que se coloquen los elementos, contiene uno diferente. La cardinalidad del Conjunto Combinatorio esta dada por el número combinatorio[379];

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Permutaciones Con Repetición

Si existe un sustrato de k clases de elementos, en los que el número total de elementos que conforman las clases es igual a n, el número total de permutaciones con repetición de elementos está dado por la división del factorial de n entre el producto de los factoriales, de sus componentes repetidos;

378 El número de posiciones que conforma cada arreglo.

379 Expresado al principio de este apéndice.

$$P_{n1,n2,n3......................nk} = \binom{n}{n1,n2,n3.....nk} = \frac{n!}{n1!n2!n3!n4!............nk!}$$

$$cuando: \sum_{i=1}^{i=k} ni = n$$

Este número se denomina también Multicombinatorio.

Apéndice IV

NOTICIA RESPECTO AL CÁLCULO DIFERENCIAL

INTRODUCCIÓN

Uno de los más grandes avances que ha producido la teoría matemática es el descubrimiento del denominado "Cálculo Diferencial e Integral", generado a partir de la necesidad de explicar el movimiento de los cuerpos astrales y en general de dotar un lenguaje para poder explicar de forma adecuada las leyes de la mecánica; por Isaac Newton y Godofredo W, Leibnitz a principios del siglo XVIII.

El actual desarrollo de la ciencia, exige que cualquier estudioso que intente ser denominado científico, tenga una adecuada idea de este importante avance matemático que permite una exposición elegante de las leyes que por inducción se obtienen de los fenómenos sociales. También es el único instrumento que permite la contrastación empírica de las teorías propuestas.

En Bolivia son escasos los verdaderos científicos sociales, la mayoría apenas trasciende los límites del álgebra elemental, lo que significa una gran desventaja en la comprensión de la realidad, respecto a los científicos extranjeros, que fundamentan su exposición en modelos teoréticos con capacidad predictiva[380]. No debiera servirnos de consuelo el peor panorama que acontece en las ciencias de la ingeniería, en la cual se enseñan fórmulas sin apreciar su contenido intrínseco, así por esta mala práctica, como una de las obras más abominables de esta característica ingenieril (tribialización del conocimiento de la matemática) se han construido en La Paz, los denominados "Puentes Trillizos", con fallas de cálculo que ni siquiera pudieran ser admitidas en un abogado, que con sólo la lienza, la escuadra y un compás, seguramente les hubieran dado un trazo recto. En ese contexto, se intentará exponer el concepto de los principales protocolos que conforman el cálculo Diferencial e Integral.

380 La función predictiva es la más alta de cualquier ciencia positiva.

CONCEPTO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

El Cálculo Diferencial e Integral es la rama de la matemática que permite establecer una teoría del efecto matemático de una variación infinitesimal del argumento de una función en el producto funcional y las leyes mediante las cuales se puede componer un área a partir de superficies infinitesimalmente pequeñas, sujetas a una Ley Funcional.

FUNCIÓN

Se denomina función a la relación entre dos variables[381], bajo la asunción de que una depende de otra. En términos más restrictivos, una función es una relación entre dos conjuntos, uno denominado dominio y el otro recorrido, de modo que a todos los elementos del dominio les corresponda uno y sólo uno de los elementos del recorrido[382]. A la variable dependiente se le suele llamar Función y a la independiente Argumento.

En el caso más sencillo, que corresponde a la situación en la cual ambos conjuntos son escalares[383], una función se denota por la expresión:

$$Y = f(X) \qquad o \qquad y = f(x) \Leftrightarrow x \in X \qquad y \qquad y \in Y$$

La anotación expresada en el lado izquierdo indica la relación funcional entre dos conjuntos numéricos[384] y la segunda entre los elementos de dos conjuntos numéricos, señalando además que estos pertenecen a determinados conjuntos. Ambas notaciones son perfectamente congruentes.

GRAFO DE UNA FUNCIÓN

El gráfico de una función[385], es su representación en el Plano Cartesiano, mediante un conjunto infinito de puntos de modo que tengan por primer argumento a ***x*** y por segundo argumento a ***y***, la función. Si se trazara un eje perpendicular al eje director de coordenadas, la función sería cortada únicamente una vez en su campo de definición[386].

FUNCIONES ALGEBRAICAS O POLINOMIALES

En particular una función algebraica de grado *n*, tiene la forma:

$$y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_nx^n$$

381 Cualquiera de ellas pudiera ser vectorial.

382 Esta característica relacional se denomina, Sobreyectiva.

383 Que será el único estudiado en este apéndice.

384 Pertenecientes a los Números Reales.

385 De un argumento, de acuerdo a las limitaciones que se han definido en el trabajo.

386 Esta proposición es equivalente a la definición de función que se ha expresado.

En la que los parámetros a_i son números reales, está definida en el intervalo: $]-\infty \quad +\infty[$[387]

OTRAS FUNCIONES IMPORTANTES

$y = a\ln x$	*Función Logarítmica natural definida en* $:]0 \quad +\infty[$ [388]
$y = a\log_q x$	*Funcion Logarítmica de Base q, definida en* $:]0 \quad +\infty[,\ q > 0$
$y = a e^{kx}$	*Función Exponencial, definida en* $:]-\infty \quad +\infty[$
$y = a q^{kx}$	*Funcion Exponencial de base q, definida en* $:]-\infty \quad +\infty[, q > 0$
$y = a\sin(kx)$	*Funcion Trigonométrica Sinusoidal definida en* $]-\infty \quad +\infty[$
$y = aCos(kx)$	*Función Trigonométrica Cosinusoidal definida en* $]-\infty \quad +\infty[$

Se nota claramente que las dos primeras funciones cortan el eje de las abscisas en uno, que la tercera de las funciones corta el eje de las ordenadas en *a* y que este parámetro en las dos últimas es una medida de su amplitud[389], en cambio en estas, el valor de *k*, representa la frecuencia de su periodicidad.

LÍMITES Y CONTINUIDAD

El Argumento de una función, "*x*", cambia de modo infinitesimal, es decir sus cambios tienden a hacerse cero. Es decir que entre dos números que son parte de su campo de definición, siempre existe la posibilidad de encontrar un tercero, por más próxima que se quiera hacer su diferencia.

Se denomina Límite de una función (de una variable dependiente) al valor al que esta tiende cuando su Argumento se aproxima indefinidamente por la derecha o por la izquierda[390] a un parámetro específico[391];

$$\underset{x \to x_0}{Lim} \ f(x) = y_0$$

Pudiera ser posible que la función no este definida en el punto $\boldsymbol{x_0}$, sin embargo si además está definida en el punto referido, y el valor de la función es igual a su límite cuando tiende a ese valor, la función es continua;

$$\underset{x \to x_0}{Lim} f(x) = f(x_0)$$

387 El corchete abierto hacia fuera, significa que el límite del intervalo de su definición propuesto no está incluido, en tanto que abierto hacia dentro implica que el límite propuesto está incluido.

388 Además deberá considerarse que *q* es diferente de uno.

389 Amplitud de Onda.

390 Por la derecha significa que se acerca desde los números mayores, por la izquierda, que se acerca desde los números menores.

391 Esta definición es conveniente para funciones escalares, para variables vectoriales deberá corregirse; "cuando se acerca indefinidamente a un punto vectorial".

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Se define La Derivada[392], como la ratio entre el incremento de la función y el incremento de su Argumento cuando este cambio tiende a cero, en un valor específico de ambos. La derivada de una función es una razón de incrementos entre las variables dependiente e independiente.

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=Lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{[(x+h)-x]}$$

La derivada es una nueva función, originada a partir de la función original que tiene por campo de existencia, todos los valores del argumento en los cuales es posible encontrar este límite. **Los puntos en los cuales es posible encontrar este límite específico se denominan Diferenciables.**

En un punto específico, la derivada de una función es:

$$m_0=\frac{dy}{dx}_{x=x_0}=Lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{[(x_0+h)-x_0]}$$

Se lee la derivada de la función en el punto x_0, en el caso de que el límite señalado exista.

En relación al grafo de la función, la derivada es la pendiente de la tangente, m_0, que tiene la función en el punto cuya abscisa es x_0.

TEOREMAS IMPORTANTES EN RELACIÓN A LA DERIVACIÓN

1) **ADITIVA: La derivada de la suma de dos funciones, es igual a la suma de sus derivadas. La derivada de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus derivadas;**

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$
$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$$

2) **DEL PRODUCTO: La derivada del producto de dos funciones, es igual a la suma de la primera función sin derivar multiplicada por la derivada de la segunda función sumada a la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar;**

$$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

3) **DEL COCIENTE: La derivada del cociente de dos funciones, es igual al cociente que tiene por numerador; la derivada de la función numerador multiplicada por la función denominador menos la derivada de la función denominador**

---

392 A<r El nombre propiamente es: "La Función Derivada de una Función Original".

multiplicada por la función numerador, y por denominador, a la función denominador elevada al cuadrado[393];

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

4) **DE LA CADENA: Si una función, *Y* tiene por argumento a otra función *U*, la que a su vez tiene por argumento a *X*. La derivada de la función *Y*, respecto a *X* es igual a la derivada de la función *Y*, respecto a *U*, multiplicada por la derivada de la función (u) respecto a *X*.**

$Sea: y=f(u(x))$

$$f'(x)=f_1'(u)f_2'(x)=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\quad 327$$

DERIVADAS DE FUNCIONES IMPORTANTES

1) Derivada de un Monomio Algebraico:

$sea: f(x)=\ y=a\,x^{\alpha}$

$f'(x)=a\alpha x^{\alpha-1}$

2) Derivada de una función Logarítmica Natural:

$Sea: f(x)=y=a\ln x$

$f'(x)=\frac{a}{x}$

3) Derivada de una función Logarítmica de base q:

$Sea: f(x)=y=a\log_q x$

$f'(x)=\frac{a\log_q e}{x}$

4) Derivada de una función Exponencial:

$Sea: f(x)=a\,e^{kx}$

$f'(x)=a\,k\,e^{kx}$

5) Derivada de una función Exponencial de Base q:

$Sea: f(x)=a\,q^{kx}$

$f'(x)=a\ k\ \ln q\ q^{kx}$

6) Derivada de una función Trigonométrica Sinusoidal:

$Sea: f(x)=a\,Sin(k\,x)$

$f'(x)=a\,k\,Cos(k\,x)$

---

393 Está definida cuando el valor de $g(x)$ sea distinto de cero.

7) Derivada de una función Trigonométrica Cosinusoidal:
$Sea: f(x) = a\,Cos(k\,x)$
$f'(x) = -a\,k\,Sin(k\,x)$

DERIVADAS DE ORDEN MAYOR

Se denomina segunda derivada de una función, a la razón de cambios infinitesimales de su derivada y de su argumento. Resulta de derivar la primera derivada de la función[394].

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{d x^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{(x+h) - x}$$

DIFERENCIAL

Se define la diferencial de una función al producto de su función derivada, por la variación infinitesimal de su argumento;
$d(f(x)) = dy = f'(x)dx$

Es el incremento infinitesimal de una función en cualquier punto en el cual está definida, siempre que en él sea continua y diferenciable[395].

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN (INTEGRAL NO DEFINIDA)

Se define como Función Primitiva de una función o Integral No Definida de una función, a la función operacionalmente inversa a la derivación. Por lo que la primitiva de una función, es la función que por derivación da origen a aquella;
$PRIM(f(x)) = F(x) \; cuando \quad F'(x) = f(x)$

En virtud de que la derivada de una constante es igual a cero, una función puede tener infinitas primitivas, en atención a que cualquier valor de la constante satisface la condición establecida en el lado derecho de la expresión. La siguiente nomenclatura es la más usada para representar la primitiva, *F(x)*, de la función *f(x)*;
$F(x) = \int f(x)dx$

TEOREMAS IMPORTANTES EN RELACIÓN A LA INTEGRACIÓN NO DEFINIDA

1) La integral no definida de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales no definidas de ambas;
$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

394 Este resultado se puede extender para derivadas de orden mayor al segundo orden.
395 Que se pueda encontrar en ese punto una tangente y que además sea única.

2) El Producto de dos funciones es igual a la suma de la integral no definida de la primera función por la diferencial de la segunda función más la integral no definida de la segunda función por la diferencial de la primera función;
$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$

PRIMITIVAS DE FUNCIONES IMPORTANTES

1) Primitiva de un Monomio Algebraico:
$sea: f(x) = y = a\,x^{\alpha}$
$\int a\,x^{\alpha}\,dx = a\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ [396]
$En\ el\ caso\ de\ que\ \alpha = -1$
$\int a\,x^{-1}\,dx = a\ln x + c$

2) Primitiva de una función Logarítmica Natural:
$Sea: f(x) = y = a\ln x$
$\int a\ln x\,dx = a(x\,\ln x - x)$

3) Primitiva de una función Logarítmica de base q:
$Sea: f(x) = y = a\log_q x$
$\int a\log_q x\,dx = a(x\,\log_q x - (\log_q e)\,x) + c$

4) Primitiva de una función Exponencial:
$Sea: f(x) = a\,e^{k\,x}$
$\int a\,e^{k\,x}\,dx = a\frac{e^{k\,x}}{k} + c$

5) Primitiva de una función Exponencial de Base q:
$Sea: f(x) = a\,q^{k\,x}$
$\int a\,q^{k\,x}\,dx = a\frac{q^{k\,x}}{k\,\ln(kx)} + c$

6) Primitiva de una función Trigonométrica Sinusoidal:
$Sea: f(x) = a\,Sin(k\,x)$
$\int a\,Sin(k\,x)dx = \frac{a\,Cos(kx)}{k} + c$

396 En este caso y en los que prosiguen "*c*", representa una constante de integración arbitraria (cualquier constante).

7) Primitiva de una función Trigonométrica Cosinusoidal:

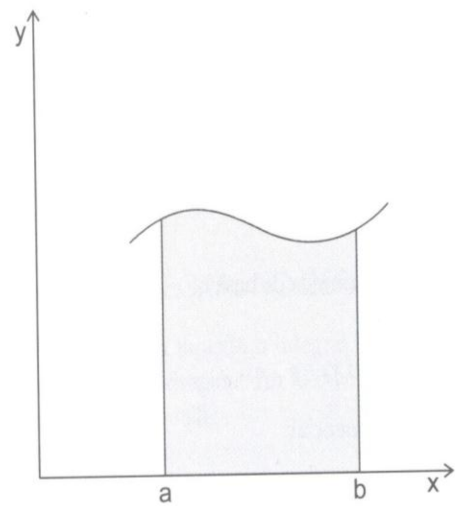
$Sea: f(x) = a\,Cos(k\,x)$

$$\int a\,Cos(k\,x)dx = \frac{-a\,Sin(kx)}{k} + c$$

INTEGRAL DEFINIDA

La acotación de una integral indefinida de una función, en un segmento de su argumento, cuando en él la indicada es continua y diferenciable, determina un área encerrada, por las proyecciones ortogonales de las cotas, el eje de las abscisas y la curva que define la función.

Gráfico:



La integral definida, en el segmento [a b], también puede interpretarse como el límite de la sumatoria que tiene por componentes, las áreas de los rectángulos en los que se a dividido la superficie descrita anteriormente, cuando estos rectángulos tienden a hacerse infinitos y consecuentemente, su base que está construida como un subsegmento del intervalo en el que está definida la integral (resultando de la división de la longitud del segmento entre el total de los rectángulos) y su altura es el valor absoluto de la función en la mediatriz, $x_?$ de cada base[397];

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{x_i=1}^{x_i=n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

397 El autor expone una definición matemática, que representa una simplificación de la definición matemática general.

APLICACIONES IMPORTANTES

1) Derivadas:

a) Una función es creciente en un punto, si su primera derivada es positiva y si su primera derivada es negativa, la función es decreciente. En el caso de que su primera derivada sea cero, en ese punto la función es constante.

b) Una función tiene un máximo (relativo) en la abscisa en la cual su primera derivada es cero y su segunda derivada es negativa.

c) Una función tiene un mínimo (relativo) en la abscisa en la cual su primera derivada es cero y su segunda derivada es positiva.

d) Una función tiene un punto de inflexión, en la abscisa en la cual su segunda derivada se hace cero. El punto de inflexión inicia la convexitud[398], cuando además la tercera derivada es negativa; en el caso de que la tercera derivada sea positiva inicia la concavitud[399].

e) Una función es estrictamente monótona en un intervalo, cuando en él, derivada de la función no cambia de signo.

2) Integrales Definidas:

El área encerrada por una función, el eje de las abscisas y dos proyecciones perpendiculares al eje indicado en dos cotas predefinidas, se obtiene mediante una integral definida de la función en las indicadas cotas.

398 La función cambia a una tasa decreciente.

399 La función cambia a una tasa creciente.

Apéndice V

NOTICIA RESPECTO AL ÁLGEBRA MATRICIAL

El álgebra matricial es una de las principales ramas de la matemática contemporánea, porque mediante ella es posible representar de forma simultánea, una cantidad de relaciones matemáticas e interpretarlas de manera análoga al álgebra que utiliza escalares. En particular, una matriz puede contener los coeficientes inductores de relaciones lineales del mismo orden[400].

DEFINICIÓN

Una Matriz es un conjunto de elementos ordenados bajo dos criterios[401].

Dos particiones de un mismo conjunto intervinculadas de forma ortogonal[402].

Un arreglo rectangular de los elementos de un conjunto, distribuidos en filas y al mismo tiempo en columnas.

DIMENSIÓN DE UNA MATRIZ Y NÚMERO DE SUS ELEMENTOS

La dimensión de una matriz, es el número de filas, N, por el número de columnas, **M**, que contiene. Este producto es irreducible, en cuanto no cumple la ley de clausura en los escalares.

El número de sus elementos se aprecia, evidentemente, que es el producto de esos factores (fila, columna) como si fueran escalares.

400 Al ser éste el uso más frecuente de las matrices, suele exponerse conjuntamente con el Álgebra Lineal.

401 Se recordará la definición de vector como un conjunto de elementos ordenados (bajo un solo criterio).

402 Definición del Autor.

NOMENCLATURA

Se simboliza una Matriz, se la escribe por comprensión, mediante las letras mayúsculas y un subíndice que denota su dimensión. También se la puede simbolizar mediante un elemento genérico escrito en minúscula aparejado a un subíndice, en dupleta, cuyo primer miembro indica de forma general cualquier fila y el segundo, cualquier columna que pudiera corresponder a la matriz.

A_{NxN} $\quad o \quad$ $a_{i,j}$

Por extensión se escribe una matriz, detallando sus elementos en el orden enunciado, entre corchetes:

$$A_{NxM} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

IDENTIDAD DE MATRICES

Dos matrices son idénticas, si y solo si todos sus elementos son idénticos además de estar en la misma posición.

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Es la operación que consiste en multiplicar todos los elementos de una matriz, por un escalar. La Multiplicación de una matriz por un escalar es una operación conmutativa.

SUMA Y DIFERENCIA DE MATRICES

Se suman dos matrices si se agregan los elementos correspondientes a cada posición; esto sólo es posible si las dos matrices factores son de la misma dimensión. Se diferencian dos matrices cuando a los elementos de la primera, se les sustrae los de la segunda, siendo ambas de la misma dimensión. Ambas operaciones cumplen con la Clausura, Asociatividad, Existencia de un Neutro y de un Inverso, la primera además es Conmutativa.

PRODUCTO DE DOS MATRICES

Se define la operación Producto Matricial entre dos MATRICES COMPATIBLES; dos matrices son compatibles, para la Multiplicación Matricial, cuando el número de columnas de la primera, es igual al número de filas de la segunda. Así el producto de dos matrices $\mathbf{A}_{\mathbf{pxk}}$ y $\mathbf{B}_{\mathbf{kxq}}$, compatibles, es una matriz **C,** de dimensión **p x q,** en la cual, sus elementos, $C_{r,s}$ se generan del siguiente modo:

$$c_{r,s} = \sum_{j=1}^{j=k} a_{r,j}\, b_{j,s}$$

El producto de dos matrices es Asociativo, tiene un Neutro, un Inverso y es No conmutativo, es decir que $AxB \neq BxA$.

Ilustración (1).- Multiplicar la matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ y } \quad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$$

Sólo son compatibles si se desarrolla el producto matricial: AxB

$$AxB = \begin{bmatrix} ap+br+ct & aq+bs+cu \\ dp+er+ft & dq+es+fu \\ gp+hr+it & gq+hs+iu \end{bmatrix}$$

MATRICES CARACTERIZADAS

Una Matriz Caracterizada es una matriz que tiene características especiales, dignas de ser relevadas:

Matriz Nula

Es aquella que tiene todos sus elementos iguales a cero.

Matriz Cuadrada

Si el número de filas de una matriz, de cualquier dimensión, es igual al número de sus columnas. Se define por la diagonal principal de una matriz cuadrada a aquellos elementos cuyo subíndice fila es idéntico al subíndice columna. La dimensión de una matriz cuadrada se denomina "Orden Matricial", o singularmente "Orden".

Matriz Diagonal

Es aquella, matriz cuadrada, en la cual todos sus elementos tienen el valor de cero, excepto los que conforman su diagonal principal.

Matriz Identidad

Es la Matriz Diagonal en la que todos sus elementos No Nulos son iguales a uno.

Matriz Escalar

Es la Matriz Diagonal en la que todos sus elementos No Nulos son idénticos a un único escalar.

Matriz Triangular

Es la Matriz cuadrada, cuyos elementos por debajo o por encima de la diagonal principal, son nulos. En el primer caso, es triangular inferior y en el segundo triangular superior.

Matrices Conmutativas

Si dos matrices cuadradas, al multiplicarse, generan un resultado idéntico (una matriz idéntica en todos sus elementos), son entre sí conmutativas.

Matrices Anticonmutativas

Si se altera el orden el que se multiplican dos matrices y el resultado es el original, multiplicado por el escalar -1, las matrices son anticonmutativas entre sí.

Matriz Transpuesta

Es la matriz que resulta de intercambiar las filas de una matriz, por sus columnas; es decir la que surge de trastrocar el orden bajo el cual se hallan dispuestos los elementos de una matriz.

Matriz Simétrica

Es la matriz cuadrada idéntica a su transpuesta. Es decir aquella en la que se cumple que:

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i,j$$

DETERMINANTE

Es una operación sobre una matriz cuadrada que consiste en la suma algebraica de todos los productos que se pueden lograr de elementos que pertenezcan a una única columna y a una única fila. El signo de estos productos estará determinado por el número de inversiones en la permutación de todos los subíndices columna de estos elementos[403].

403 Si se ordenan los índices columna de los elementos de cada uno de los factores producto, el signo será negativo si se han permutado un número impar de veces los elementos respecto al orden natural En este caso preceden números mayores un número impar de veces a números menores, en la serie descrita. Si ocurre lo contrario, el signo del factor es positivo.

Si un vector fila o un vector columna, de una matriz cuadrada, se puede escribir como una combinación lineal de los otros vectores respectivos, su determinante es nulo, denominándose la matriz Singular.

Se simboliza el determinante de una matriz, colocando la letra mayúscula que la representa entre el signo de valor absoluto: $\det A = |A|$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE SEGUNDO ORDEN

Es el producto de los elementos de su diagonal principal, menos el producto de los elementos de su diagonal secundaria:

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = |A| = ad - bc$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE TERCER ORDEN

Si a la matriz original, se le agregan dos filas y se suman los productos de las diagonales paralelas a su diagonal principal (incluida está) y luego se restan los productos de las diagonales paralelas a su diagonal secundaria (incluida está), se obtiene el determinante[404];

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd)$$

MENOR Y ADJUNTO DE UN ELEMENTO DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si eliminando la fila y la columna a la que pertenece un elemento $a_{i,j}$, se construye una nueva matriz de orden (n-1), su determinante es **el menor** del elemento señalado. Si además se multiplica este determinante por $(-1)^{i+j}$ se obtiene **el adjunto** del elemento mentado.

Se puede calcular el determinante de una matriz, tomando en cuenta que la suma algebraica de los adjuntos de una línea o de una columna, es igual a éste.

CARACTERÍSTICA DE UNA MATRIZ

La Característica o Rango de una matriz, es igual al mayor orden de cualquier menor con determinante no nulo que se puede encontrar en ella. Si el Rango de una matriz es igual a su orden, la matriz se denomina regular.

404 Este método se denomina de La Estrella.

TRANSFORMACIÓN ELEMENTAL DE UNA MATRIZ

Se denomina Transformación Elemental de una Matriz, a la operación que no involucra la modificación de la Característica ni el Orden de una Matriz. Pueden desarrollarse en filas o en columnas, y son:

a) La permutación de filas o de columnas.

b) La multiplicación de todos los elementos de una columna o de una fila por un escalar no nulo.

c) La suma de los elementos de una fila, multiplicados por un escalar a los correspondientes de otra fila. La suma de los elementos de una columna, multiplicados por un escalar a los correspondientes de otra columna.

COLINEALIDAD DE LOS VECTORES DE UNA MATRIZ

Un vector fila o un vector columna es colineal respecto a otros vectores de una matriz (fila o columna, respectivamente) si puede expresarse como una combinación lineal de estos;

$$V_j = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i V_i$$

EQUIVALENCIA MATRICIAL

Dos matrices son equivalentes cuando la segunda se puede lograr mediante la aplicación de operaciones de transformación elemental a partir de la primera y viceversa.

MATRIZ EN SU FORMA NORMALIZADA

Es una matriz equivalente a la original, que solamente tiene elementos no nulos en las primeras posiciones de su diagonal principal o vectores fila o columna, cuyos elementos postreros son nulos, siendo los primeros significativos.

MATRIZ DE LOS ADJUNTOS

Se denomina Matriz de los Adjuntos de una matriz cuadrada, a la Matriz Transpuesta de aquella que reúne todos los adjuntos de los elementos de la matriz original.

INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Es la matriz que pre multiplicada o post multiplicada por otra (en el caso de existir) origina la Matriz Identidad, del mismo orden de la matriz original.

Una matriz cuadrada es inversible, si es Regular, es decir cuando su determinante asociado es no nulo.

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Se puede calcular la inversa de una matriz, dividendo su matriz adjunta asociada sobre su determinante:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

Ilustración (2).- Hallar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

1) Se encuentra su Matriz Adjunta asociada:

$$Adj\ A = \begin{vmatrix} ei - fh & -(bi - ch) & bf - ce \\ -(di - fg) & ai - cg & -(af - cd) \\ dh - eg & -(ah - bg) & ae - bd \end{vmatrix}$$

2) Luego se divide cada uno de los elementos de la anterior por el determinante de **A,**

$(aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd)$;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{ei-fh}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} & \frac{-(bi-ch)}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} & \frac{bf-ce}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} \\ \frac{-(di-fg)}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} & \frac{ai-cg}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} & \frac{-(af-cd)}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} \\ \frac{dh-eg}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} & \frac{-(ah-bg)}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} & \frac{ae-bd}{(aei+dhc+gbf)-(ceg+fha+ibd)} \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEO MEDIANTE DETERMINANTES, REGLA DE CRAMER

Se puede escribir un sistema de ecuaciones lineales, de n ecuaciones con n incógnitas;

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots\dots a_{1,n} = b_1$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots\dots a_{2,n} = b_2$$

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + \dots\dots a_{i,n} = bi$$
$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots\dots a_{n,n} = b_n$$

de forma matricial, como:

$A\ X = B$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

El sistema es no homogéneo al ser el vector de los coeficientes independientes no nulo[405].

Este sistema tiene una única solución cuando la Matriz de los Coeficientes Dependientes, denominada también Matriz del Sistema, es regular, es decir, su característica es igual a su orden. En este caso, la solución de cualquiera de las variables está dada por la ratio entre el determinante de la "Matriz Afectada" en la columna de la variable de la que se busca solución[406] y el determinante de la Matriz del Sistema;

$$Sol\ x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{,2,2} & b_2 & \\ \\ a_{n,1} & a_{n,2} & b_n & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,i} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{,2,2} & a_{2,i} & \\ \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,i} & a_{n,n} \end{vmatrix}}$$

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL NO HOMOGÉNEO UTILIZANDO LA MATRIZ INVERSA

En el caso de que la matriz del sistema sea regular, se puede lograr la solución, pre multiplicando por la matriz inversa del sistema ambos lados de la ecuación matricial que representa el sistema lineal no homogéneo;

$A\ X = B$

$A^{-1}A\ X = A^{-1}B$

$I\ X = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

405 Si todos los coeficientes beta, fueran iguales a cero, el sistema se denominaría Homogéneo.

406 Que resulta de sustituir la columna correspondiente a la variable de la que se busca solución, por el vector de coeficientes independientes.

CONCEPTOS IMPORTANTES DE LA TEORÍA POLÍTICA DERIVADOS A PARTIR DEL ÁLGEBRA MATRICIAL

Campo Político Complejo

Es aquel en el que los vectores políticos se encuentran ordenados siguiendo dos patrones patrones de orden y no uno como en el caso vectorial simple. Por ejemplo, siguen el orden anejo a la distribución del esquema partidario y también el orden correlacionado con el afán sexista[407] (externo de las fuerzas políticas concurrentes).

Menor de un Elemento Político

Es aquella parte del sistema político que no es un determinado elemento o de una submatriz integrante del sistema político. Por ejemplo es un menor político del MAS la iglesia católica y los comités cívicos del oriente, en cuanto están conformados por elementos ajenos al MAS.

Cofactor Político

Es el menor político de un elemento, en consideración a su actuación. El menor político puede ser cooperante o discooperante. En el primer caso el cofactor político es positivo (o aliado) y en el segundo negativo (u opositor).

Colinealidad Política

Una fuerza política es colineal a otra cuando siendo parte del sistema político se produce como una proyección de la primera, es decir tiene la misma dirección. Por ejemplo, existen muchas juntas vecinales paceñas colineales al Movimiento Sin Miedo.

Orden Político Regular

Es aquel en el que no existen fuerzas políticas colineales.

407 Se pueden ordenar los elementos del campo político de acuerdo a la ideología partidaria a la que se adhieren y también de acuerdo al sexo de sus componentes.

Bibliografía

- BAY Christian, *LA ESTRUCTURA DE LA LIBERTAD*, EDITORIAL TECNOS-MADRID, 1961.
- BRECHT Arnold, *TEORÍA POLÍTICA*, EDICIONES ARIEL, BARCELONA, 1963.
- DURKHEIM Emilio, *PRAGMATISMO Y SOCIOLOGÍA*, EDITORIAL SCHAPIRE S.R.L.
- FATONE Vicente, *LÓGICA E INTRODUCCIÓN A LA FILOSOFÍA*, EDITORIAL KAPELUSZ-BUENOS AIRES, NOVENA EDICIÓN, 1969.
- FELLER William, *INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES-VOLUMEN I*, EDITORIAL LIMUSA, MÉXICO, 1975.
- FOUCAULT Michel, *MICROFÍSICA DEL PODER*, EDICIONES LA PIQUETA, MADRID, 1992.
- FOUCAULT Michel, *LA ARQUEOLOGÍA DEL SABER*, EDITORES SIGLO XXI, ARGENTINA 2010.
- FREEMAN Harold, *INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA*, EDITORIAL TRILLAS, MÉXICO, 1970.
- FREUND John E., *ESTADÍTICA MATEMÁTICA CON APLICACIONES*, CUARTA EDICIÓN, IMPRESO EN MÉXICO.
- FREUND John E., *ESTADÍTICA*, EDITORIAL PRENTICE HALL, CUARTA EDICIÓN, MEXICO, 1970.
- GUTIERREZ PANTOJA Gabriel, *METODOLOGÍA DE LAS CIENCIAS SOCIALES I*, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, 2006.
- HARNETT Donald L., *INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTADÍSTICO*, IMPRESO EN E. U. A., 1987.
- HARTAMANN Nicolai, *LA NUEVA ONTOLOGÍA*, EDITORIAL SUDAMERICAN- BUENOS AIRES, 1954.
- HOEL Paul G., *ESTADÍSTICA ELEMENTAL*, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL S. A., MÉXICO, 1976.
- HOFFE Otfried, *KANT, BIBLIOTECA DE FILOSOFÍA*, EDITORIAL HERDER, BARCELONA, 1986.
- HOPE K., *MANUAL PRÁCTICO DE ESTADÍTICA AVANZADA*, EDITORIAL TRILLAS, MÉXICO, 1970.

- JOHNSTON J., *MÉTODOS DE ECONOMETRÍA*, EDITORIAL VICENS VIVES, ESPAÑA, 1977.
- KISH Leslie, *MUESTREO DE ENCUESTAS*, EDITORIAL TRILLAS, MÉXICO, 1979.
- KOPNIN P. V., *LÓGICA DIALÉCTICA*, EDITORIAL GRIJALBO S. A.-MÉXICO, 1966.
- MADDALA G. S., *ECONOMETRÍA*, EDICIÓN GRAW HILL, MÉXICO, 1990.
- MALINVAUD Edmond, *MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA ECONOMETRÍA*, EDICIONES ARIEL, BARCELONA, 1963.
- McKINNEY John C., *TIPOLOGÍA CONSTRUCTIVA Y TEORÍA SOCIAL*, AMORRORTU EDITORES BUENOS AIRES, 1968.
- MILLER Irwin, *PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIEROS*, CUARTA EDICIÓN, 2000.
- NAGEL Ernest, *INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA Y AL MÉTODO CIENTÍFICO 1*, AMORRORTU EDITORES, CUARTA EDICIÓN.
- NAGEL Ernest, *LA LÓGICA SIN METAFÍSICA*, EDITORIAL TECNOS MADRID, 1974.
- NAGEL Ernest, *LA ESTRUCTURA DE LA CIENCIA*, EDITORIAL PAIDÓS, ARGENTINA, 1974.
- PALACIOS C. Severo, *ESTADÍSTICA APLICADA*, EDITORIAL EDUCACIÓN Y CULTURA, BOLIVIA, 1998.
- PANSE V. G., *MÉTODOS ESTADÍSTICOS*, EDITORIAL FONDO DE CULTURA ECONÓMICA, MÉXICO, 1953.
- POPPER Karl R., *LA LÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA*, EDITORIAL TECNOS-MADRID, 2001.
- SANTALÓ Luís A., *PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA*, 1970.
- SANTESMASES MESTRE Miguel, *DISEÑO Y ANÁLISIS DE ENCUESTAS EN INVESTIGACIÓN SOCIAL Y DE MERCADOS*, EDICIONES PIRÁMIDE, MADRID, 1997.
- SHERLOCK A. J., *ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES*, EDITORIAL VECENS VIVES, BARCELONA, 1968.
- SCHWARZENBERGER Georg, *LA POLÍTICA DEL PODER*, EDITORIAL FONDO DE CULTURA ECONÓMICA, MÉXICO, 1960.
- SEIFFERT Helmut, *INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA*, EDITORIAL HERDER-BARCELONA, 1977.
- SIEGEL Sydney, *ESTADÍSTICA NO PARAMÉTRICA*, EDITORIAL TRILLAS, MÉXICO, 1988.

- SMART J. J., *ENTRE CIENCIA Y FILOSOFÍA*, EDITORIAL TECNOS MADRID, 1975.
- WEBER Max, *ECONOMÍA Y SOCIEDAD*, EDITORIAL FONDO DE CULTURA ECONÓMICA, MÉXICO, 1944.
- WILLER David, *LA SOCIOLOGÍA CIENTÍFICA-TEORÍA Y MÉTODO*, AMORRORTU EDITORES BUENOS AIRES, 1974.
- YAMANE Taro, *PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA APLICADA*, EDITORIAL HARLA, MÉXICO, 1977.
- YAMANE Taro, *ESTADÍSTICA*, EDITORIAL HARLA, MÉXICO, 1967.

El autor, docente titular de la UMSA, es abogado, economista, diplomado en Filosofía Política, tiene Maestría en Economía social e Historia Económica y es candidato a Doctor Phd. en Derecho Penal.

A la gran maestra de mi vida, Edda Valdivia Vda. De Martínez, forjadora de mi piedad, inteligencia y erudición, sin cuyo cobijo seria uno mas de aquellos que repiten sin entender y a los que aterroriza la innovación.

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

CARRERA DE CIENCIA POLÍTICA Y GESTIÓN PÚBLICA

CIENCIA POLÍTICA Y GESTIÓN PÚBLICA
U.M.S.A.
LA PAZ - BOLIVIA

No hay mérito sin reto, analizar y gestionar es lo nuestro.

2012